FACILITER L'ENSEIGNEMENT DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE EN SE SERVANT DE SON HISTOIRE

Jean-Jacques DROESBEKE[1] et Catherine VERMANDELE[2]

TITLE

Facilitate the teaching of the arithmetic mean by means of its history

RÉSUMÉ

L'objectif de cet article est de montrer que l'enseignement d'un concept statistique peut dépasser largement les caractéristiques mathématiques de sa définition en attirant l'attention des élèves sur les conditions de son utilisation, sa raison d'être et son impact sur notre société que son histoire révèle. Cette histoire devient alors un formidable outil pédagogique. Nous tenterons de le prouver en considérant la moyenne arithmétique.

Mots-clés : *enseignement, statistique, histoire de la statistique, moyenne arithmétique.*

ABSTRACT

The objective of this article is to show that the teaching of a statistical concept can overtake the mathematical characteristics of its definition by drawing the attention of the pupils on the conditions of its use and its impact on our society revealed by its history. This history becomes then an efficient educational tool. We will try to illustrate this fact by considering the arithmetic mean.

Keywords: *teaching, statistics, history of the statistics, arithmetic mean.*

1 Introduction

L'enseignement de la statistique a fortement évolué durant la dernière décennie mais certainement moins vite que le concept lui-même de *statistique*. Depuis le milieu du vingtième siècle, les deux significations accordées à ce terme, selon qu'on le mettait au pluriel ou non, ont connu de profondes transformations. Les *statistiques* qui découlent de processus de production de *données* de plus en plus nombreux et de plus en plus rapides ont envahi notre horizon, et ces masses de données — dites *Big Data,* si vous voulez être « tendance » — posent de plus en plus de questions. De son côté, la *statistique,* cette méthodologie développée au cours du temps pour apprendre à gérer ces données dans des buts divers, est aussi en pleine mutation, se transformant en une *science des données* qui se trouve au cœur de multiples professions nouvelles. La femme et l'homme de demain se doivent de recevoir de leurs enseignants et enseignantes quelques rudiments essentiels pour tenter de comprendre, profiter, mais aussi se protéger des dangers de cette nouvelle situation. C'est un devoir citoyen qui devient de plus en plus aigu.

[1] Université libre de Bruxelles, LMTD, jjdroesb@ulb.ac.be
[2] Idem, vermande@ulb.ac.be

Nous vivons dans un monde où, chaque jour, nous entendons parler de statistiques diverses par des personnes qui nous bombardent de proportions dans tous les sens, de moyennes parfois surprenantes, ponctuées souvent d'un commentaire du type : « Vous voyez bien que j'ai raison ! ». Elles vont même jusqu'à vous montrer l'un ou l'autre graphique plus ou moins bien construit. Il faut apprendre aux nouvelles générations — et pas seulement à elles d'ailleurs — à développer un sens critique à l'égard de ces comportements et de ces affirmations dès le moment où ces adultes en devenir sont mis en contact avec des outils utilisés parfois à tort et à travers. C'est dans ce contexte que nous avons écrit cette contribution.

Un enseignement de statistique comporte nécessairement la présentation d'un certain nombre de *valeurs typiques*, parfois appelées *indicateurs*, construites à partir d'un ensemble de données généralement numériques, dont les plus connues s'appellent *moyenne arithmétique*, *variance*, *coefficient de corrélation*…

Pour les présenter aux élèves, on peut utiliser diverses méthodes d'enseignement. Citons-en trois plus ou moins courantes.

- **La méthode traditionnelle** : elle consiste à introduire un concept au moyen d'une définition souvent exprimée par l'intermédiaire d'une formule mathématique. Ainsi, dans le cas d'une *moyenne arithmétique*, on suppose disposer d'une série de *n* valeurs numériques $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ d'une variable désignée, dans ce cas-ci, par la lettre *x*. La moyenne arithmétique de ces valeurs est généralement notée $\bar{x}$ et est définie par l'expression :
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$
De nombreux enseignants illustrent le calcul de cette valeur typique au moyen d'un exemple plus ou moins original, parlent des propriétés mathématiques de cet indicateur (voir, par exemple, Dehon *et al.*, 2015), et puis passent à la suite de la leçon, heureux du travail accompli.

- **La méthode progressive :** Une manière plus douce de procéder consiste à partir d'un petit exemple dans lequel l'élève retrouve quelques éléments de ses préoccupations quotidiennes : son argent de poche, le temps mis pour arriver à l'école le matin… À partir d'une série de valeurs réelles ou non de la variable choisie — que l'on a soin de représenter au préalable sur une échelle graduée, « pour voir les choses » — l'élève est amené à découvrir la signification de l'expression « être au milieu de » et de vérifier que la moyenne arithmétique qu'il découvre concrètement se trouve bien dans une zone centrale. Mais quand on travaille de la sorte, on a parfois des surprises, comme dans le cas de la série des valeurs suivantes — que nous avons ordonnée pour en faciliter la lecture — correspondant à l'argent de poche, exprimé en euros, reçu durant une période déterminée par les onze élèves d'une classe :
$$\{10, 10, 10, 15, 15, 20, 50, 50, 50, 50, 60\}$$
Demandez à ces élèves de calculer la moyenne arithmétique de ces valeurs et leur calculette préférée leur fournit dans la seconde le résultat : 30,9091 ! Nous sommes persuadés que vos commentaires pourront les sensibiliser à l'importance d'avoir un comportement critique à l'égard de ce type de résultat, mais tous les enseignants n'ont pas la chance de disposer d'une série aussi utile que celle-la pour susciter chez les élèves un débat qui peut être intéressant.

À partir de là, recommence souvent le cycle bien connu « formule, propriétés… ». C'est une méthode que nous aimons bien car elle est très souple (voir Droesbeke et Vermandele, 2006).

- **La méthode nouvelle :** Après avoir implémenté sur le portable de ses élèves le logiciel statistique qu'il a lui-même reçu, parfois la veille au soir, l'enseignant ou l'enseignante leur transfère, avec sa clé USB ou par internet, un fichier de données qu'on lui a envoyé. La leçon se passe alors à tenter de leur donner les instructions qui permettent de faire apparaître sur l'écran la valeur de cette mystérieuse moyenne arithmétique dont on doit parler dans le cours. Malheureusement, le temps mis pour arriver à ce résultat ne permet pas souvent d'aborder d'autres questions du type : « à quoi cela sert-il ? » ou « cela a-t-il un sens ? ».

Il est évident que ces portraits sont quelque peu caricaturaux, mais ils ne sont pas nécessairement éloignés de la réalité. Nous connaissons probablement tous une personne de notre entourage adepte d'une de ces méthodes. Mais que pouvez-vous dire de son implication dans les réponses à des questions du type : « Pourquoi avons-nous calculé cette moyenne ? » ou encore « Que peut-on conclure de ce résultat ? » ? Il existe bien sûr quelques ouvrages sur le sujet pour lui venir en aide. Ceux que nous privilégions font appel à l'histoire des données numériques. Nous pensons en effet qu'un enseignant ou une enseignante sera mieux à même de répondre à ces dernières si on lui a fourni au préalable des informations d'ordre historique sur le rôle d'une moyenne arithmétique, les raisons pour lesquelles elle fait partie de la table des matières du cours consacré au traitement statistique de données ou encore des situations où elle s'est révélée inefficace, voire néfaste.

Les enfants, les adolescents et même les adultes aiment qu'on leur raconte des histoires. Alors pourquoi ne pas leur faire plaisir tout en les éduquant. C'est quand même plus agréable. Tentons l'expérience en proposant la petite histoire que voici, inspirée de Droesbeke et Vermandele (2018).

2 Le début de l'histoire

> « Il était une fois, une donnée. Au début, elle a la forme d'un trait, tracé sur la paroi d'une grotte, accompagné souvent de quelques autres traits semblables. Elle se transforme en signes divers, en particulier cunéiformes, quand l'écriture est inventée, parfois inclus dans d'autres dessins gravés sur une tablette d'argile. Les plus connus d'entre eux ont l'air de clous et de chevrons. On les appellera plus tard des *nombres.* Les *données numériques* pouvaient naître ! »[3]

La première partie de l'ouvrage dont ce texte est extrait est consacrée à une *courte histoire des données numériques.* Nous y avons distingué quatre périodes : celle qui précède le dix-septième siècle, l'ensemble des dix-septième et dix-huitième siècles, le dix-neuvième siècle et enfin le vingtième siècle et le début du suivant. La première d'entre elles se caractérise essentiellement par trois catégories de données observées : celles qui résultent d'un *dénombrement*, l'enregistrement de *productions de biens* et de *transactions commerciales* et enfin les résultats de l'*observation de phénomènes astronomiques et terrestres*.

Le dénombrement a toujours été une opération importante de l'activité humaine, que ce soit au niveau familial, de la tribu, des états. Un autre domaine propice à l'éclosion de données numériques, plus proche de la vie au jour le jour, est le commerce. Produire, vendre, consommer sont des activités avides de données même réduites à leur plus simple expression, que ce soit pour établir des listes de produits agricoles, de biens fabriqués par des individus ou des collectivités. Une troisième source de données numériques est l'astronomie. Les Babyloniens ont déjà observé les mouvements du soleil et des planètes à intervalles réguliers, obtenant ainsi plusieurs observations d'un même phénomène. Dans ce cas, laquelle faut-il retenir ? Ne peut-on pas les remplacer par une « valeur de compromis » et, dans l'affirmative, laquelle ? N'est-ce pas pour répondre à cette dernière question que la moyenne arithmétique a trouvé sa raison d'être ?

Calculer une moyenne arithmétique de quelques valeurs isolées ne présente pas de difficultés particulières à notre époque, surtout quand on utilise une échelle de numération comme le système décimal que nous pratiquons en Occident depuis le dixième siècle. Avant, c'était un peu plus compliqué (Droesbeke et Vermandele, 2016). Recourir à cet outil de synthèse est une tendance actuelle bien établie. Mais comment cette question a-t-elle été résolue dans le passé ? Quelle raison a-t-on pu avoir pour penser à cet indicateur ? Commençons par le début.

3 Avant de recourir à une moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique est connue depuis l'antiquité. Les mathématiciens savent qu'on la trouve dans les mathématiques pythagoriciennes, au côté de la moyenne harmonique et de la moyenne géométrique. Si a et b sont deux nombres positifs, leur moyenne arithmétique vaut $\frac{a+b}{2}$, leur moyenne harmonique est l'inverse de la moitié de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et leur moyenne géométrique est la racine carrée de leur produit. Ainsi les nombres 3 et 6 ont 4,5 pour moyenne arithmétique, 4 pour moyenne harmonique et $3\sqrt{2}$ pour moyenne géométrique. Mais

[3] Extrait de Droesbeke et Vermandele (2018), p. 25.

ces moyennes n'ont pas été associées par les Pythagoriciens à des données observées. Par contre, ceux-ci en ont vu des applications au niveau musical, comme on peut le découvrir en détail dans l'ouvrage d'Aristide Quintilien (3e siècle de notre ère) intitulé *De la musique*.

De nos jours, on n'échappe pas à la moyenne arithmétique[4]. Dans les medias, sur les réseaux sociaux, la moyenne est reine dès qu'on veut synthétiser une information qui porte sur un nombre plus ou moins élevé de données. Est-ce un comportement naturel ? La réponse à cette question est : non ! C'est le résultat d'une histoire qui n'a en réalité pas bien commencé pour elle. La voie que nous suivons à notre époque pour synthétiser un ensemble de données n'a pas du tout été empruntée, ni dans l'Antiquité, ni au Moyen-Âge. Que pouvait-on donc faire en ces temps-là ? Prenons deux exemples cités[5] dans la littérature qui permettent de répondre à cette question.

Nous sommes en 428 avant notre ère. L'historien Thucydides (-460 à -395) décrit dans le tome 3 de la *guerre du Péloponnèse* la troisième invasion des Lacédémoniens en Attique et tout particulièrement le siège de la ville de Platée qui dure depuis plusieurs mois. Il nous raconte la façon dont les habitants décident de s'en sortir :

> « …les Platéens toujours assiégés par les Péloponnésiens et les Béotiens, souffrant de la disette et n'espérant plus aucun secours d'Athènes ni d'ailleurs, firent de concert avec les Athéniens enfermés avec eux dans la ville le projet suivant ; ils sortiraient tous ensemble, en franchissant de force s'ils le pouvaient les murailles de l'ennemi. C'étaient le devin Théaenétos fils de Tolmidas et Eumolpidas fils de Daïmakhos un de leurs stratèges, qui avaient conçu ce dessein. Par la suite la moitié de la garnison, effrayée des difficultés de l'entreprise, y renonça. Deux cent vingt volontaires acceptèrent les risques de la sortie. Voici comment ils s'y prirent. Ils fabriquèrent des échelles ayant la hauteur de la muraille ennemie. Ils calculèrent cette hauteur en dénombrant les rangées de briques sur la partie de la muraille qui leur faisait face et qu'on n'avait pas recouverte de crépi. Plusieurs hommes à la fois comptaient les rangées et, en admettant que quelques-uns se trompassent, la plupart devaient trouver le nombre exact ; d'ailleurs ce calcul fut répété fréquemment ; la distance étant peu considérable, l'on pouvait facilement apercevoir la partie du mur à examiner. C'est ainsi qu'ils déterminèrent la hauteur des échelles en la calculant d'après l'épaisseur des briques. »

Les assiégés disposaient d'une série d'observations individuelles : le nombre de rangées de briques que chaque soldat chargé de cette mission avait compté. En admettant que l'un ou l'autre se trompe, la réponse correspondait au nombre le plus souvent cité. C'est ce que les statisticiens appellent un *mode* ou une *valeur modale*. Recourir à l'usage d'une moyenne aurait été impensable …et inutile !

L'Antiquité nous apporte d'autres témoignages à propos du souci de savoir comment se comporter quand on dispose de plusieurs observations d'un même phénomène. L'astronomie est un domaine idéal pour illustrer cela. Nous avons déjà rappelé que les Babyloniens ont observé, il y a près de 2500 ans, les mouvements du Soleil et des planètes à intervalles réguliers, obtenant ainsi plusieurs observations d'un même phénomène. Nous ne connaissons malheureusement pas la manière dont ils ont remplacé ces observations multiples par des « valeurs de compromis ». Avançons un peu dans le temps et portons-nous au deuxième siècle

[4] Plusieurs auteurs se sont intéressés à son histoire au cours des soixante dernières années ; nous nous inspirons ici de leurs écrits : Plackett (1958), Desrosières (1993), Droesbeke et Tassi (1995), Hald (2003), Stahl (2006), Droesbeke et Vermandele (2016), Stigler (2016), Raper (2017), Droesbeke et Vermandele (2018), Rose (2018)…

[5] Le premier exemple est cité dans Stigler (2016), le deuxième dans Plackett (1958).

avant notre ère. Un personnage, souvent présenté comme le plus grand astronome de l'Antiquité, naît à Nicée au deuxième siècle avant notre ère. Il s'appelle Hipparque. On connaît peu de choses de sa vie (Quand est-il né ? Quand est-il mort ? Où a-t-il vécu ?). Heureusement, on en sait plus sur son œuvre grâce à certains écrits, notamment ceux de Claude Ptolémée.

À l'époque d'Hipparque, on considère que le Soleil tourne autour de la Terre. Dans ce contexte, Hipparque se penche sur l'estimation de la longueur de l'année tropicale. Pour y arriver, il s'intéresse aux variations de durée entre les passages du soleil aux points solsticiaux, pour lesquels la hauteur de culmination du Soleil passe par un maximum (ou un minimum). Son hypothèse est que cette durée est constante. Au vu de la diversité des observations qu'il obtient, il doit bien reconnaître que si c'est le cas, il a commis des erreurs d'observation ou de calcul. Il veut estimer la variation maximale des durées observées pour montrer qu'elle est négligeable. Pour y arriver il se base sur l'*étendue* des observations, c'est-à-dire l'écart entre la plus grande et la plus petite d'entre elles. En estimant la durée par le milieu de cet intervalle — ce que les anglo-saxons appellent *midrange* de nos jours — il prend pour variation maximale la moitié de l'étendue.

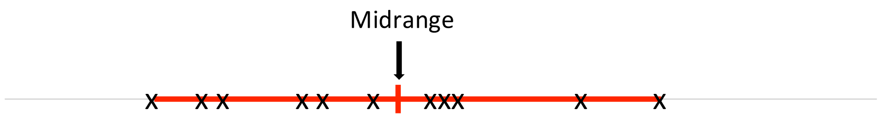

FIGURE 1 – *Démarche d'Hipparque*

Claude Ptolémée, astronome grec du 2e siècle de notre ère, reprendra les relevés antérieurs d'Aristarque de Samos et surtout d'Hipparque et proposera, en présence de plusieurs observations d'un même phénomène, de conserver une seule valeur : celle qui lui permettra de proposer dans sa *grande syntaxe mathématique* — transmise à l'Occident en 140 par les Arabes sous le nom d'*Almageste* — son système d'univers géocentrique qui va placer la terre au centre de l'univers pour près de quatorze siècles, jusqu'à ce qu'un astronome polonais nommé Copernic se rende compte des insuffisances du système de Ptolémée et propose une nouvelle théorie des mouvements planétaires en passant du géocentrisme à l'héliocentrisme. Ainsi va l'histoire…

Une petite anecdote est rapportée à propos d'Hipparque. Ce dernier a aussi procédé à une estimation de l'année tropicale en n'utilisant que deux observations : la date du solstice d'été de l'année 280 avant notre ère (observée par Aristarque de Samos) et sa propre observation faite en l'année 135 avant notre ère. Il divise la différence entre les dates d'observation (145 ans) par le nombre de révolutions du soleil qu'il calcule et propose ainsi une durée de l'année égale à 365 jours et un quart (moins un trois centième du jour pour être précis). Conscient de la possibilité de commettre une erreur en raison de la distance importante qui sépare les deux dates d'observation utilisées, il utilise ses estimations d'imprécision de ses mesures, ce qui le conduit à une erreur possible de 15 minutes par an. Quand on sait que sa surestimation réelle est en fait de l'ordre de 6 minutes, on ne peut que s'incliner devant son résultat, même s'il est teinté d'une certaine chance (sinon d'une chance certaine). La chance, il en faut dans la vie. Et la moyenne en aura plus tard…

Bien sûr, prendre le milieu de l'intervalle qui sépare la plus petite de la plus grande valeur d'une série d'observations numériques consiste à calculer la moyenne arithmétique des deux valeurs extrêmes, mais il ne correspond pratiquement jamais à la moyenne arithmétique de toutes les observations. Ce dernier calcul ne fut jamais un objectif pour Hipparque et encore moins pour Copernic. Ne parlons donc pas de quelque chose qui n'avait pas cours dans l'Antiquité, mais posons-nous plutôt la question : quand lui a-t-on donné la parole ?

4 Les balbutiements du recours à une moyenne

La chute de l'Empire romain et le Moyen-Âge ne sont pas des périodes propices pour recourir à une moyenne. Par contre, en s'interrogeant sur les développements qui ont contribué significativement à l'évolution de l'histoire des données à la Renaissance, il faut certainement retenir l'amélioration des instruments de mesure. Celle-ci fut essentielle car elle permit aux hommes de s'aventurer sur les mers en s'assurant une meilleure qualité des moyens de se guider. Par ailleurs, si les mesures astronomiques constituaient toujours une manière incontournable — malgré leurs imprécisions — de savoir où l'on se trouvait, un autre instrument de connaissance permit de mieux maîtriser le sol sur lequel on vivait : la géodésie. Cette discipline et l'astronomie constituent deux domaines privilégiés d'un traitement de données qui se cherche encore entre le seizième et le dix-huitième siècle.

Un exemple remarquable qui illustre cela est celui de la mesure d'un arc de méridien, au centre d'une question primordiale à l'époque : quelle est la figure de la terre ? Est-elle ronde, allongée, aplatie ? Le recours à la technique de *triangulation* est à l'origine d'aventures multiples dans diverses régions du globe qui permirent de résoudre la question (voir, par exemple, Droesbeke et Vermandele, 2016).

Au début de la Renaissance, quand on se trouve devant plusieurs observations d'un même phénomène, la moyenne arithmétique n'a toujours pas droit de cité pour tenter d'approcher sa vraie valeur. On préfère toujours chercher la « bonne observation », celle en laquelle on croit. Mais il arrive parfois qu'on passe près d'une solution à un problème, par hasard, ou par intuition. C'est ce qui est arrivé à Jakob Köbel (±1462-1533), un mathématicien, imprimeur et éditeur, né à Heidelberg et décédé à Oppenheim. L'histoire se passe à propos de l'estimation d'une unité agraire, le *rod*, encore appelé *pole* (perche) ou *hate.* Il correspond à un peu plus de cinq mètres, la largeur du terrain que couvre la volée de grains dispersés par la main d'un semeur. Un rod équivaut environ à seize pieds, unité de mesure prisée à l'époque.

FIGURE 2 – *L'estimation d'un rod*

Pour estimer la longueur d'un rod, ce personnage a procédé de manière très élégante. Il s'est posté à la sortie de l'office dominical et a demandé à seize fidèles de sexe masculin de se mettre à la queue-leu-leu, doigts de pied contre les talons du voisin, comme on peut le voir dans la figure 2, tirée de son ouvrage de géométrie appliquée à la mesure.

Le rod correspond alors à la distance entre le bout des doigts de pied du premier de la file et les talons du dernier. Cette opération qui permet de faire la somme des longueurs de seize pieds d'homme consiste en fait à considérer seize fois la moyenne arithmétique de ces longueurs des pieds et, comme Monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir dans le Bourgeois Gentilhomme de Molière, Jakob Köbel utilisa la moyenne arithmétique sans s'en rendre explicitement compte[6].

Mais revenons à notre histoire des données numériques. Elle nous dit donc que grâce aux progrès apportés à la fabrication des instruments de mesure, les données deviennent de plus en plus nombreuses et peut-être fiables. À la fin du seizième siècle, un homme fait de leur analyse un outil de réflexion tout à fait intéressant. Il se nomme Tycho Brahé (1546-1601).

Ce personnage, de nationalité danoise, appartient à la plus ancienne noblesse du royaume du Danemark. Sa richesse personnelle et le soutien du roi Frédéric II du Danemark lui permettent de construire un observatoire sur l'île Hveen que ce monarque lui a donnée. Grâce à l'achat de nombreux instruments d'observation, il recueille de multiples données — relativement précises pour l'époque — dans ce haut lieu de l'observation astronomique qui prend pour nom *Uranibourg*. Tycho Brahé y travaille pendant dix-sept ans avant de passer en Allemagne où, avec l'aide de Kepler (1571-1630) et d'autres collaborateurs, il poursuit ses études, dont celles consacrées à la planète Mars sont restées célèbres (ces études seront utilisées par Kepler pour établir ses trois lois fondamentales).

Voilà un homme qui dispose enfin de nombreuses données. En a-t-il fait bon usage ? Certains répondent positivement en évoquant son influence sur ses contemporains qui se contentent la plupart du temps de rechercher la *bonne donnée* parmi celles dont on dispose. On commence à s'interroger sur l'intérêt de recourir, comme Brahé et Kepler l'ont préconisé parfois mais sans réelle justification, à une moyenne arithmétique pour proposer une valeur « de synthèse ». Il est intéressant de noter que nos deux astronomes n'envisagent pas d'utiliser une moyenne simple de leurs données, mais plutôt une moyenne pondérée, prouvant sans doute par là qu'ils accordaient plus d'importance à certaines observations qu'à d'autres.

Tycho Brahé aurait-il été capable de justifier clairement sa démarche? On peut en douter quand on le voit hésiter entre le géocentrisme et l'héliocentrisme de notre univers. Il émet en effet des réflexions théoriques dont le géocentrisme n'est pas tout à fait banni. Il suffit pour s'en convaincre d'examiner son modèle de rotation des astres. Bien qu'influencé par les idées de Copernic, il ne peut pas faire complètement abstraction des théories antérieures. C'est ainsi qu'il prône un système *géo-héliocentrique* dans lequel la Terre est toujours immobile au centre de l'univers, la Lune et le Soleil tournant autour d'elle, alors que les planètes et corps célestes tournent autour du Soleil. Il meurt à Prague en 1601, convaincu d'avoir raison. C'est bien la preuve que la construction d'un modèle peut avoir des ratés même quand on dispose de nombreuses données !

Le 17e siècle contribue peu à l'histoire de la moyenne arithmétique. On constate même un retour en arrière. En 1632, le mathématicien Henry Gellibrand (1597-1637) s'inspire de la

---

[6] Voir Stigler (2016).

méthode d'Hipparque et utilise la moyenne arithmétique des valeurs extrêmes observées comme valeur de compromis. Un peu plus tard, vers 1660, le physicien et chimiste irlandais Robert Boyle (1627-1691) — connu notamment pour avoir proposé une loi, découverte presque simultanément par lui et par l'abbé Edme Mariotte (1620-1684) — est élu Président de la Royal Society qu'il vient de fonder. Il prend publiquement parti pour l'expérience « unique » qui peut valoir, selon lui, beaucoup mieux que des expériences multiples. Décidément, la science ne facilite pas le recours à la moyenne ! L'éclaircie vient d'un autre domaine.

Aux alentours de 1700, un homme est à l'apogée de sa gloire : Sébastien Le Prestre, marquis de Vauban (1633-1707). Cet expert en poliorcétique — l'art d'organiser le siège ou la défense d'une place forte ou d'une ville — se passionne, à la fin de sa vie, pour la *dîme royale*, un nouvel impôt pour lequel il a besoin d'informations diverses. Il se trouve confronté à plusieurs estimations d'une même grandeur et se demande l'attitude à adopter. Pour estimer une surface, il utilise une *moyenne proportionnelle* — *moyenne* = « ce qui est entre deux extrémités » ; *proportionnel* = « en rapport avec d'autres quantités *de même genre* ». Par contre, pour les rendements agricoles, qui concernent des entités différentes, il parle de *valeur commune* (voir Desrosières, 1993 ou Perrot, 1992). C'est une distinction intéressante dont nous reparlerons.

En 1722, un mathématicien, Roger Cotes (1682-1716) — qui a collaboré avec Newton pour élaborer une méthode fort utilisée en analyse numérique — propose dans un article posthume une justification de l'usage de la moyenne arithmétique en assimilant des observations à des poids d'objets répartis sur un support, cette moyenne correspondant au point d'appui sur lequel le support se trouve en équilibre. Ce centre de gravité est pour lui digne de représenter le groupe constitué par ces objets.

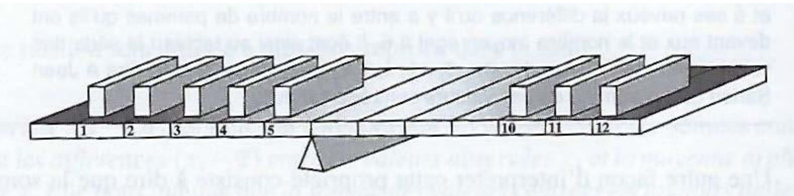

FIGURE 3 – *Recherche du centre de gravité*[7]

L'affaire devient sérieuse : la moyenne devient fréquentable. Elle le deviendra tout à fait grâce à l'étude d'un concept essentiel dans le processus d'observation : l'erreur de mesure.

5 L'importance de l'erreur

L'erreur de mesure interpelle depuis longtemps les scientifiques et, en premier lieu, les astronomes. L'un d'entre eux, et non des moindres, présente le 22 février 1632 au Grand Duc de Toscane Ferdinand II de Médicis, son fameux *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* qui lui attirera tant de soucis des autorités pontificales. Il s'agit bien sûr de Galileo Galilei (1564-1642), le premier à donner une définition structurée du concept d'erreur d'observation d'un phénomène céleste[8] :

---

[7] Cette figure est reprise de Dehon *et al.* (2015).

[8] Nous reprenons ici la formulation moderne proposée par Stahl (2006) qu'il a lui-même reprise de sources

> « 1. Il n'y a qu'un seul nombre qui donne la distance d'une étoile au centre de la Terre, la vraie distance.
> 2. Toutes les observations sont entachées d'erreurs, dues à l'observateur, aux instruments et aux autres conditions d'observation.
> 3. Les observations sont distribuées symétriquement autour de la vraie valeur ; c'est-à-dire que les erreurs sont distribuées symétriquement autour de zéro.
> 4. Les petites erreurs se produisent plus souvent que les grandes erreurs.
> 5. La distance calculée est fonction des observations angulaires directes de telle façon que de petits ajustements des observations peuvent se traduire en un grand ajustement de la distance. »

En se basant sur cette approche, face à des observations multiples — que l'on noterait actuellement $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — destinées à mesurer une distance, Galilée pense que la vraie valeur x de cette dernière doit probablement minimiser la fonction

$$f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|.$$

Les propos de Galilée constituent une avancée certaine pour la théorie des erreurs d'observation, mais pas pour celle de la moyenne arithmétique. Un siècle plus tard, on se rendra compte que la valeur de x qui permet de minimiser cette fonction ne correspond pas à la moyenne arithmétique des observations, mais plutôt à leur *médiane*, c'est-à-dire à la valeur observée qui est telle que le nombre d'observations qui lui sont inférieures ou égales équivaut au nombre d'observations qui lui sont supérieures ou égales.

Le 18^{e} siècle voit enfin quelques tentatives pour justifier l'usage d'une moyenne arithmétique afin de synthétiser une série d'observations distinctes d'un phénomène (voir Droesbeke et Tassi, 2015 et Plackett, 1958). L'un des premiers à aborder cette question de façon argumentée est Thomas Simpson (1710-1761). Ce tisserand a cultivé sa passion des mathématiques et ses qualités pédagogiques pour intégrer un monde qui le séduit en commençant par dispenser des cours du soir et proposer des solutions élégantes et compréhensibles à des problèmes de mathématiques publiés dans des périodiques populaires. Attiré par de nombreux sujets des mathématiques, il publie entre 1737 et 1757 onze ouvrages dont le succès commercial et la notoriété soulignent la qualité d'écriture.

Deux domaines particuliers lui permettent de poser les pierres d'une reconnaissance posthume. Le premier se situe au cœur des sciences actuarielles où il se fait remarquer dans le calcul d'annuités sur base de travaux réalisés antérieurement par le mathématicien Abraham de Moivre (1667-1754). Le second concerne davantage le sujet de cet article et portera bientôt le nom de *théorie* (*statistique*) *des erreurs d'observations*.

Deux manières de traiter des erreurs d'observation ont coexisté pendant de nombreuses années au dix-huitième siècle. La première milite pour la recherche d'une *bonne* mesure, entachée d'une erreur limitée, inférieure à une erreur maximale, acceptable ou en tout cas à craindre. Dans cette optique — défendue notamment par Leonhard Euler (1707-1783) — prendre en compte d'autres mesures en plus de la bonne ne peut que faire croître l'erreur globale, notamment si l'on utilise les observations les plus mauvaises.

Une deuxième voie nous intéresse davantage ici. Si les données se multiplient et se contredisent, il faut en comprendre la raison, les gérer pour en tirer profit. Une hypothèse

antérieures.

commence à s'imposer : l'utilisation de toutes les observations permet des compensations dont on peut espérer qu'elles réduisent l'erreur résultante.

Dans ce contexte, Simpson publie en 1756 A letter to the Right Honourable George Earl of Macclesfield, President of the Royal Society, on the advantage of taking the mean of a number of observations, in practical astronomy dans les Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Cette publication est certes de nature modeste mais elle n'est pas banale pour l'époque. Le souci de Simpson est de montrer qu'une moyenne arithmétique — calculée dans son cas sur six observations — est meilleure qu'une seule observation en supposant connues certaines caractéristiques aléatoires liées aux observations. L'originalité de Simpson est de se concentrer non sur la répartition de ces dernières, mais plutôt sur celle des erreurs de mesure associées à ces observations. Plus précisément, il suppose que les observations sont indépendantes et que chacune d'entre elles est susceptible d'être entachée d'une erreur dont les valeurs possibles se répartissent selon une distribution symétrique connue, comme Galilée l'avait préconisé.

Sans rentrer dans une technicité inutile ici, la façon dont se distribuent des erreurs d'observation peut revêtir pour Simpson divers aspects. Il peut s'agir d'une distribution uniforme, d'abord discrète et ensuite continue comme dans la figure 4. Dans ce cas, les erreurs possibles se répartissent symétriquement autour de zéro, l'« *erreur idéale* », faisant de cette dernière la *moyenne* des erreurs possibles. Mais penser que les toutes petites erreurs de mesure ont autant de chance de se produire que celles qui sont plus grandes ne le satisfait pas non plus. S'inspirant de travaux antérieurs d'Abraham de Moivre (1667-1754) sur la distribution de la somme des faces de plusieurs dés, Simpson envisage une distribution triangulaire (voir figure 5) où les erreurs proches de zéro sont plus probables que celles qui sont plus grandes.

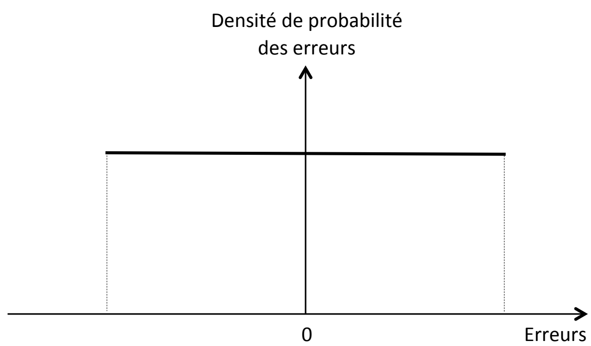

FIGURE 4 – *Distribution uniforme*

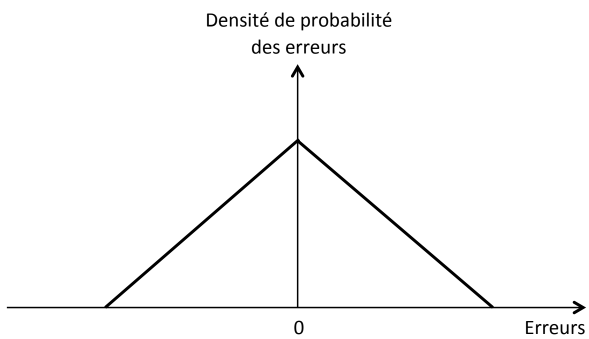

FIGURE 5 – *Distribution triangulaire*

Mais l'histoire réserve parfois des surprises! Si en 1756, Simpson fait un plaidoyer convaincant pour la moyenne arithmétique, un an plus tard, en 1757, un autre personnage fait une autre proposition dans un contexte différent. Il s'appelle Rudjer Josip Boscovich ; elle engendrera l'émergence d'un concurrent à la moyenne : la *médiane.*

6 Ajuster des points par une droite

L'accumulation des relevés astronomiques et cartographiques a fourni un terrain de choix au développement de techniques appelées de nos jours « *méthodes d'ajustement* ». La question qui se pose à l'époque est de déterminer les coefficients a et b de la droite d'équation $y = a + bx$ qui soit le « plus en accord » avec des observations simultanées de deux variables

x et y, que nous désignons selon la formulation actuelle par (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n)[9]. Le premier à proposer une solution à ce problème est Roger Cotes (1682-1716), dont nous avons déjà parlé, qui s'intéresse au cas particulier où a est nul. La méthode adoptée au départ est de prendre comme valeur de b la solution de l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - bx_i) = 0,$$

ce qui donne $b = \sum y_i / \sum x_i$, ou encore le rapport entre la moyenne arithmétique des y_i et celle des x_i[10]. Dans le cas général où $a \neq 0$, une solution est proposée ultérieurement par l'astronome allemand Johann Tobias Mayer (1723-1762), professeur de mathématiques à Göttingen et directeur de l'observatoire de cette ville[11]. Elle sera développée par Laplace en 1812. Mais un homme en avait déjà fait un usage intéressant en 1757.

Rudjer Josip Boscovich est né en 1711 à Dubrovnik, dénommée autrefois Raguse. Devenu professeur de mathématiques au Collegium Romanum de Rome en 1740, il est remarqué par le pape Benoît XIV, féru de sciences, et en particulier de mathématiques. Ses contributions scientifiques débutent réellement avec son engagement dans le débat sur la forme de la terre qui déchaine les passions, notamment en France où les Cassini, astronomes de renom, proposent une théorie opposée à celle défendue par Newton. Un des outils principaux de ce débat est la mesure d'un degré de méridien. Est-elle la même aux pôles et à l'équateur ? Il n'est pas de notre propos de rentrer dans le détail de ce débat[12], mais l'implication de Boscovich dans les années 1740 est telle qu'il est chargé par le Pape d'accompagner un autre jésuite, Christopher Maire (1697-1767), pour effectuer des mesures d'un arc de méridien et en profiter pour établir une carte actualisée des Etats Pontificaux. Ils publieront, en 1755, leur rapport dont une version plus succincte sera proposée en 1757, par Boscovich.

Dans son étude menée avec Maire dans les Etats Pontificaux, Boscovich constate que pour les petits arcs, leur longueur y et le carré (noté x) du sinus de la latitude du point central de l'arc obéissent approximativement à une relation linéaire du type $y = a + bx$. L'ellipticité valant $b/3a$, il s'attelle au calcul des paramètres a et b à partir d'observations existantes et d'autres qu'il recueille. Boscovich dispose de quinze observations dont onze proviennent de France. Il refuse de prendre en compte toutes ces dernières en raison de la trop grande proximité des lieux de relevé. Il retient uniquement Paris qu'il joint à quatre autres endroits où des mesures ont été effectuées : Quito — dont la latitude est nulle — le Cap de Bonne Espérance, la Laponie et Rome, où il a fait des relevés avec Maire. La valeur observée à Quito — pour laquelle $x = 0$ — lui fournit la valeur de a. Pour déterminer b, il se base sur le fait qu'il possède dix paires d'observations. Il commence par privilégier les écarts entre les observations qui sont les plus grands, mais la variabilité importante des résultats obtenus le désespère. Le recours à une moyenne le tente aussi, mais là non plus, il n'est pas satisfait du résultat. Dans la version synthétique qu'il publie en 1757, Boscovich propose un nouveau

---

[9] Remarquons qu'à l'époque, il en était autrement. Les notations *x, y, z*…étaient utilisées pour désigner les *paramètres* représentés actuellement par *a, b, c*… Inversement, les *variables* apparaissaient généralement sous la forme de lettres du début ou du milieu de l'alphabet. Ainsi, le « modèle linéaire » est écrit par Laplace de la façon suivante : $a_i = y\, p_i + x_i$ où y est le paramètre inconnu, a_i et p_i sont des valeurs connues et x_i un aléa pair.

[10] Voir, par exemple, Droesbeke *et al.* (2015).

[11] Voir, par exemple, Droesbeke *et al.* (2015).

[12] Voir, par exemple, Droesbeke et Vermandele (2018), p. 99-104.

principe sous forme littérale. Il consiste à apporter des « corrections » aux observations — qui donneront des *valeurs ajustées* — de manière telle que :

- *la somme des corrections positives soit égale à la somme des corrections négatives* [sans tenir compte de leur signe],
- *la somme de toutes les corrections* [sans tenir compte de leur signe] *soit la plus petite possible.*

L'usage des valeurs absolues n'est pas neuf à l'époque. Galileo Galilei les avait déjà utilisées auparavant (voir plus haut). Par contre le principe énoncé par Boscovich est tout à fait innovant. Dans un supplément à un traité publié à Rome (Benedict Stay, 1760), il propose une méthode de résolution géométrique que l'historien des Sciences Isaac Todhunter (1820-1884) qualifiera en 1873 de « *simple, claire et instructive* ». La méthode de Boscovich sera adoptée dès 1789 par Laplace, dans son « second mémoire » sur la figure de la terre publié en 1793, qui lui donnera une formulation algébrique dont on s'apercevra que la solution est fournie par le calcul d'une médiane et non celui d'une moyenne arithmétique.

Mais il ne sera pas encore question, à l'époque, de puiser dans cette démarche de quoi justifier l'emploi d'une médiane pour déterminer un « milieu », souci de plus en plus présent à cette époque. C'est an contraire la moyenne qui va « enfin » connaître des heures de gloire dans cette recherche d'un milieu, grâce, en particulier, à un personnage dont l'importance scientifique ne sera égalée que par celle de Laplace : il s'agit de Carl Friedrich Gauss.

7 La recherche d'un milieu

La deuxième moitié du dix-huitième siècle accorde effectivement à la recherche d'un milieu toute son attention. En 1776, Joseph-Louis, comte de Lagrange (1736-1813), rédige un *Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations : dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités ; et où l'on résout différents problèmes liés à cette matière*. On y retrouve les résultats de Simpson augmentés de nouvelles lois des erreurs qui constituent autant de nouveaux modèles.

Peu avant les travaux de Lagrange, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) avait consacré une partie de son traité *Photometria* — publié en 1760 — à l'étude de courbes symétriques autour de zéro, cette dernière valeur étant la plus probable (ce qu'on appelle un *mode*). Cinq ans plus tard, dans un ouvrage intitulé *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, il propose même une loi semi-circulaire. C'est dans la préface de ce dernier ouvrage que Lambert introduit l'expression « *die Theorie der Fehler* » — la théorie des erreurs — qui perdurera par la suite.

Mentionnons aussi l'article de Jean III Bernoulli (1744-1807), publié en 1789 dans l'Encyclopédie méthodique et intitulé *Milieu* ; on peut y lire un passage qui souligne l'importance occupée par les erreurs d'observation à la fin du dix-huitième siècle :

> « Quand on a fait plusieurs observations d'un même phénomène, et que les résultats ne sont pas tout à fait d'accord entre eux, on a coutume alors de prendre le milieu entre tous les résultats, parce que de cette manière les différentes erreurs se répartissent également dans toutes les observations, l'erreur qui peut se trouver dans le résultat moyen devient aussi moyenne entre toutes les erreurs ».

Les lois des erreurs mentionnées ci-dessus concernaient des erreurs comprises dans un intervalle limité. Le premier à proposer une loi où les erreurs n'ont pas de limites imposées est Pierre Simon, marquis de Laplace (1749-1827), qui, en 1774, considère une loi des erreurs appelée « double exponentielle » et rebaptisée « première loi de Laplace » (voir figure 6).

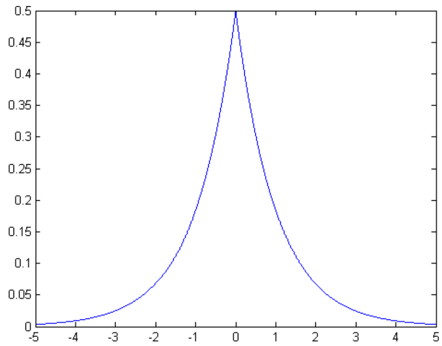

FIGURE 6 – *Première loi de Laplace*

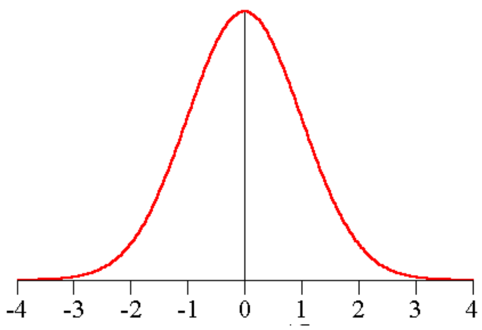

FIGURE 7 – Loi *normale, dite « de Laplace-Gauss »*

Vient ensuite — ou revient, puisque de Moivre était déjà passé par là[13] — la loi qu'on appellera *normale* à la fin du dix-huitième siècle et dont on retiendra surtout qu'elle fut choyée par Laplace et Gauss (voir figure 7). On la nommera aussi le « chapeau de gendarme » à une époque où le couvre-chef de ces gardiens de l'ordre public avait l'allure de cette courbe.

Pour montrer le rôle central de cette loi des erreurs, Gauss suppose que les erreurs suivent une loi symétrique par rapport à zéro, ce dernier étant le mode de cette loi. Si en présence de plusieurs observations d'une même quantité, la valeur la plus vraisemblable de celle-ci est la moyenne arithmétique, Gauss en déduit[14] que la loi des erreurs est celle de la figure 7. Laplace confirmera le triptyque de la figure 8 en recourant à des développements asymptotiques.

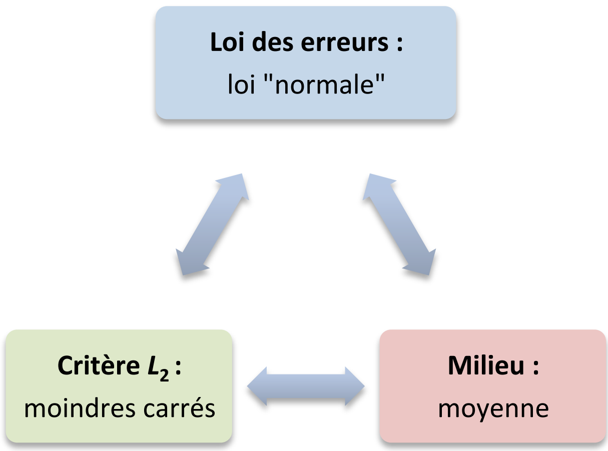

FIGURE 8 – *Le premier triptyque*

La loi des erreurs de la figure 7 complétée par l'usage d'un critère d'ajustement proposé par Adrien-Marie Legendre (1752-1833) consistant à minimiser la somme des carrés des

---

[13] Voir, par exemple, Droesbeke et Tassi (1995) et Stahl (2006).
[14] Voir la démonstration dans Stahl (2006).

erreurs d'observation permet à Carl Friedrich Gauss de poser une couronne royale sur le front de la moyenne et lui accorde le pouvoir pour une longue période : elle constitue le « meilleur milieu possible ». Et pourtant, on disposait aussi à l'époque des ingrédients d'un autre triptyque qui aurait pu naître plus tôt, celui de la figure 9, mais qui ne deviendra crédible qu'une centaine d'années plus tard.

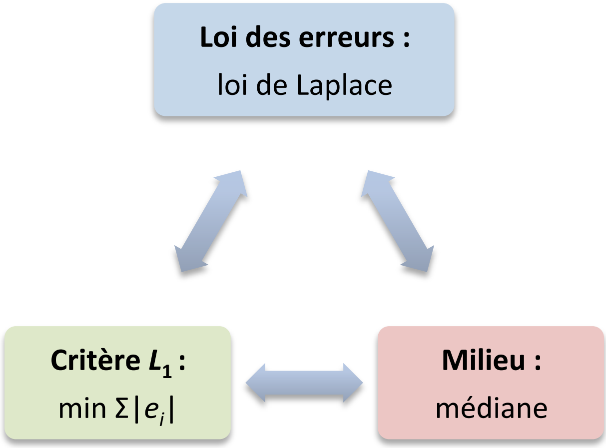

FIGURE 9 – *Le second triptyque*

La loi des erreurs de la figure 7 devient une loi de référence dans de nombreux domaines à partir du début du dix-neuvième siècle. Imaginée au départ comme caractérisant le comportement possible d'erreurs d'observation, elle est utilisée ultérieurement dans des domaines très éloignés de l'astronomie, là où les données vont être nombreuses et de nature beaucoup plus diverses, comme nous allons nous en rendre compte.

8 Le règne de la moyenne

> « Le gladiateur est sans contredit l'un des plus beaux ouvrages de la sculpture ancienne. C'est avec raison que les artistes ont étudié ses formes nobles et dégagées, et qu'ils ont souvent mesuré les principales dimensions de la tête et du corps, pour en saisir les rapports et l'harmonie.
>
> La mesure d'une statue n'est pas une opération aussi facile qu'on le croirait au premier abord, surtout si l'on désire l'obtenir avec une grande précision. En mesurant dix fois de suite la circonférence de la poitrine, on n'est pas sûr de trouver deux résultats identiquement les mêmes. Il arrive presque toujours que les valeurs obtenues sont plus ou moins éloignées de celle que l'on cherche ; et je suppose même les circonstances les plus favorables, celles où l'on n'aurait aucune tendance à prendre des mesures trop grandes ou trop petites.
>
> Si l'on avait le courage de recommencer mille fois, on finirait par avoir une série de nombres qui différeraient entre eux selon le degré de précision qu'on aurait mis à les recueillir. La moyenne de tous ces nombres s'écarterait certainement très peu de la véritable valeur. De plus, en classant toutes les mesures par ordre de grandeur, on ne serait pas médiocrement étonné de voir les groupes se succéder avec la régularité la plus grande. Les mesures qui s'écartent le moins de la moyenne générale composeraient le groupe le plus considérable ; et les autres groupes seraient d'autant plus petits, qu'ils contiendraient des mesures plus en désaccord avec cette même moyenne. Si l'on figurait la succession des groupes par une ligne, Votre Altesse a déjà deviné que cette ligne serait la courbe de possibilité… ».

L'auteur de ce texte s'appelle Adolphe Quetelet (1796-1874). Il a cinquante ans quand il écrit ces lignes. Né à Gand un an après que la République française ait envahi les contrées belges situées au Nord de la France et gouvernées auparavant par les Autrichiens, Quetelet devient professeur de mathématiques après la défaite de Napoléon, s'intéresse à l'astronomie et à la statistique durant la période pendant laquelle les hollandais ont intégré ces contrées et devient un des grands personnages du nouveau Royaume de Belgique né de la révolution de 1830.

Une de ses idées est d'étudier les caractéristiques physiques et morales des populations en remarquant que des observations multiples de ces dernières semble prendre l'allure d'une *courbe des possibilités*, inspirée de la « courbe des erreurs d'observations» en vogue parmi les astronomes.

Le texte ci-dessus est le début d'une lettre adressée au Prince de Saxe-Cobourg et Gotha en 1846, qu'il avait eu comme élève quelques années auparavant. Il y souligne l'importance de la moyenne pour approcher la mesure de la poitrine de la statue. Mais il va plus loin que cela : il regarde ce qui se passe autour de cette moyenne.

> « Je suppose maintenant qu'on réunisse les cinq cents mesures qui s'écartent le moins de la moyenne ; la demi différence qui se trouvera entre la plus grande et la plus petite de toutes ces mesures, sera le module de la précision ou l'erreur probable. Il pourrait se faire que, dans les circonstances actuelles, cette erreur probable ne fût que d'un millimètre ; en sorte que, sur les mille mesures, cinq cents seraient en erreur de moins d'un millimètre, et cinq cents autres seraient en erreur de plus d'un millimètre. On aurait ainsi 1 contre 1 à parier qu'en prenant une nouvelle mesure, on ne s'écarterait pas d'un millimètre de la moyenne de toutes les mesures, laquelle peut être considérée comme la véritable circonférence qu'on voulait apprécier ».

Quetelet passe ensuite à un deuxième problème : mesurer la poitrine d'une personne humaine :

> « Si l'on avait à mesurer la poitrine d'une personne vivante au lieu de celle d'une statue, les chances d'erreur seraient beaucoup plus nombreuses ; et je doute fort qu'après mille mesures, on trouvât encore une erreur probable de 1 millimètre. Le seul acte de la respiration, qui fait varier à chaque instant la forme et les dimensions de la poitrine, ajouterait une puissante cause d'erreur à toutes celles qu'on rencontre déjà en opérant sur une statue parfaitement immobile. Malgré ce désavantage, les mille mesures groupées par rangs de grandeur procèderaient cependant encore d'une manière très régulière. La ligne qui les représenterait, serait toujours la courbe de possibilité, mais dilatée dans le sens horizontal, proportionnellement à l'erreur probable. »

Quetelet suppose ensuite qu'on a employé un millier de statuaires pour copier le gladiateur avec tout le soin imaginable :

> « Aux premières chances d'erreur viendraient se joindre les inexactitudes des copistes ; en sorte que l'erreur probable serait peut-être très grande. Malgré cela, si les copistes n'ont pas travaillé avec des idées préconçues, en exagérant ou en diminuant certaines proportions d'après des préjugés d'école, et si leurs inexactitudes ne sont qu'accidentelles, les mille mesures, groupées par ordre de grandeur, présenteront encore une régularité remarquable et se succèderont dans l'ordre que leur assigne la loi des possibilités ».

Il envisage enfin une quatrième situation en considérant

> « …les résultats de 5738 mesures prises sur les poitrines des soldats des différents régiments écossais. […] L'exemple que je viens de citer mérite, je crois, toute notre attention : il nous montre que les choses se passent absolument comme si les poitrines qui ont été mesurées

> avaient été modelées sur un même type, sur un même individu, idéal si l'on veut, mais dont nous pouvons saisir les proportions par une expérience suffisamment prolongée. Si telle n'était pas la loi de la nature, les mesures ne se grouperaient pas, malgré leurs défectuosités, avec l'étonnante symétrie que leur assigne la loi des possibilités. »

C'est cet individu idéal, ce *type* que recherche Quetelet et la moyenne est selon lui l'outil qui lui permet de l'approcher. Il en sera toujours persuadé :

> « Parmi les admirables lois que la nature attache à la conservation de l'espèce, je crois pouvoir mettre en première ligne celle de la conservation du type. Dans mon travail sur la physique sociale, j'avais déjà cherché à déterminer ce type, par la connaissance de l'homme moyen[15]. Mais, si je ne me fais illusion, ce que l'expérience et le raisonnement m'avaient fait reconnaître, prend ici le caractère d'une vérité mathématique ».

Pour lui, la moyenne est un outil qui s'adapte à ses différents objectifs. L'utiliser pour mesurer la poitrine d'une statue conduit à commettre moins d'erreurs possibles que mesurer celle d'une personne vivante. Et la variabilité des mesures est encore plus grande quand il s'agit de le faire sur des personnes différentes.

Pour Quetelet, il existe un homme moyen idéal dont les caractéristiques peuvent être assimilées à de vraies valeurs, comme les mensurations de la statue du gladiateur. Cet homme moyen devient une référence dans toute l'Europe au milieu du 19e siècle. Selon Rose (2018) :

> « Florence Nightingale adopta ses idées en matière de soins infirmiers, déclarant que l'homme moyen incarnait la « volonté de Dieu ». Karl Marx épousa les idées de Quetelet pour élaborer sa théorie économique du communisme, annonçant que l'homme moyen prouvait l'existence du déterminisme historique. Les mathématiques de Quetelet inspirèrent au physicien James Maxwell la formulation de la théorie classique de la mécanique des gaz. Le médecin John Snow s'appuya sur les idées de Quetelet pour combattre le choléra à Londres, ce qui marqua le début de la santé publique. Wilhem Kundt, père de la psychologie expérimentale, proclamait […] que les moyennes statistiques permettaient d'en apprendre davantage sur la psychologie que tous les philosophes réunis à l'exception d'Aristote ».

La différence entre la moyenne des mesures d'une vraie valeur héritée des astronomes et celle de valeurs distinctes d'un même concept, initiée par Vauban et reprise par Quetelet dans l'étude des populations, conduit Louis-Adolphe Bertillon (1821-1883) à publier en 1876 un article décrivant les différents types de moyennes envisagés à l'époque[16]. Grand admirateur de Quetelet, Bertillon propose une nouvelle dénomination : la moyenne prise comme valeur approchée d'une grandeur réelle, mais inconnue, est qualifiée d'*objective* ; il parle de moyenne *subjective* quand il s'agit de prendre une valeur imaginaire représentative d'un ensemble d'individus ou d'objets.

L'idée d'utiliser la moyenne pour traduire un idéal par rapport auquel la réalité se distribue selon une loi symétrique qu'on qualifiera de *normale* à la fin du siècle, plaît beaucoup. Les gouvernements s'appuient sur la *Physique sociale* de Quetelet pour tenter de comprendre leur population et d'élaborer des politiques sociales. Mais elle a aussi ses détracteurs. L'un de ceux-ci se nomme Francis Galton (1822-1911). Pour lui, la moyenne n'est plus l'objectif à atteindre ; elle constitue uniquement un intermédiaire.

---

[15] Voir Quetelet (1835, 1869).
[16] Voir Bertillon (1876).

9 Il faut être au-dessus de la moyenne !

Issu de familles aisées de Birmingham en Angleterre — il a pour grands-pères Erasmus Darwin et Samuel Galton — Francis Galton se retrouve malgré lui être le cousin germain de Charles Darwin. *L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle ou de la lutte pour l'existence dans la nature*, écrit par celui-ci, l'oriente vers l'hérédité. Il fait sienne, dès 1865, l'idée que l'espèce humaine peut, grâce à ce mécanisme, orienter son évolution afin d'améliorer ses caractéristiques non seulement physiques mais aussi psychiques ou mentales. Son programme est clair : améliorer la race humaine à travers un programme d'actions scientifiques basé sur les lois de l'hérédité, auquel viendront vite s'ajouter des propositions d'ordre politique destinées à permettre de réaliser un certain nombre de modifications de cette race. Ces dernières, dont les caractéristiques principales visent à favoriser le développement des classes « méritantes » et à freiner celui des classes les plus inaptes physiquement ou mentalement, se répandent dans la société anglaise ainsi qu'à l'extérieur — sur le Continent européen, aux Etats-Unis, ... Des statisticiens célèbres vont participer à ce mouvement[17] dont certains prolongements politiques ont influencé l'histoire de la première moitié du 20e siècle avec les conséquences funestes que l'on connaît. Mais revenons à Galton...

L'hérédité est au centre de tout ! Comment va-t-elle permettre la transmission des qualités humaines, qu'elles soient physiques, psychiques ou mentales ? Comment caractériser dans ce contexte l'évolution de la race humaine et mesurer les variations héréditaires ? Il va tenter de répondre à ce type de questions en 1869 dans un ouvrage-clé de sa carrière : *Hereditary Genius*. Pour lui, l'égalité entre les hommes n'a pas de sens et, en particulier, si un homme est intelligent, c'est essentiellement pour des raisons héréditaires.

Pour tenter de valider ses hypothèses, il commence par porter son attention sur les génies, ces hommes éminents qui ont imprégné le monde de leur capacité intellectuelle. La consultation des dictionnaires biographiques ne lui permet pas de découvrir suffisamment de cas à son goût. Il va donc recourir à plusieurs enquêtes auprès de ses contemporains pour identifier ces hommes qui font l'honneur d'une nation. Mais comment connaître leur importance numérique ? Et comment se répartissent les autres hommes par rapport à eux ? C'est dans la statistique qu'il puise les outils de ses réponses.

Si la loi de répartition des caractéristiques des hommes ne peut être pour Galton que « normale », il s'interroge cependant sur la manière d'établir une échelle de mesure des aptitudes humaines, pour y placer les génies… et les autres. Pour y arriver, il utilise une « classification sociale » mise au point par Charles Booth dans les années 1870. Dans le cadre de l'application de la « loi sur les pauvres » permettant d'assister ces derniers, Booth et ses collaborateurs proposent de réaliser une enquête auprès de foyers londoniens pour positionner les enquêtés sur une échelle sociale et économique à huit positions, et cela dans le but de dénombrer et de comparer les différentes catégories de pauvres dans les quartiers de Londres. Galton étend cette échelle à 16 positions qu'il code ainsi :

x g f e d c b a A B C D E F G X

Les hommes illustres se trouvent en **X**, les génies en **G** ; les idiots et les imbéciles se trouvent à l'autre bout de l'échelle. Au centre se trouvent les *médiocres*.

---

[17] Les plus connus s'appellent Karl Pearson, Ronald Fisher, ...

TABLEAU 1 – *Répartition par classes d'intelligence (Galton, 1869, p.30)*

Echelons équidistants d'aptitude naturelle		Nombre d'hommes	
Sous la moyenne	Au-dessus de la moyenne	Par tranche d'un million de même âge	Proportion : 1 sur …
a	**A**	256.791	4
b	**B**	161.279	6
c	**C**	63.563	16
d	**D**	15.696	64
e	**E**	2.423	413
f	**F**	233	4.300
g	**G**	14	79.000
x	**X**	1	1.000.000

Il lui suffit de connaître la proportion de **X** (1 pour un million) et de **G** (14 pour un million) grâce aux enquêtes antérieures (voir ci-dessus) et de postuler le caractère normal de la distribution de la population sur cette échelle pour obtenir la répartition contenue dans le tableau 1.

Galton utilisera une démarche analogue pour publier un peu plus tard, en 1909, une *courbe de valeur civique* équivalente à une courbe de valeurs génétiques. Dans cette démarche, Galton assimile l'étude de variables mesurables comme la taille d'un individu à celle d'autres variables décrivant des aptitudes ou des niveaux sociaux qui ne demandent qu'à être, elles aussi, mesurées. Cette démarche est emblématique de travaux qui débuteront au début du 20e siècle avec la mesure de l'*intelligence générale* de Spearman (1904) et qui conduiront à d'autres mesures comme celle du quotient intellectuel (voir Desrosières, 1993).

L' « erreur » qui se répartit autour de la moyenne n'a plus une interprétation symétrique comme Quetelet l'avait imaginé. La recherche de l'idéal situé au milieu est remplacée par la comparaison entre ceux qui sont « au-dessus de la moyenne » et les autres. Pour Galton, le milieu n'est plus l'idéal à atteindre mais ce qu'il faut dépasser pour être meilleur, sinon le meilleur.

Au début du 20e siècle, la moyenne reprend cependant un peu de sa superbe, notamment en raison du développement des méthodes d'inférence statistique (estimation, intervalle de confiance, test d'hypothèse…). Mais le renouveau de la moyenne est surtout dû aux *moyennistes* du vingtième siècle. Ils ont utilisé la moyenne comme un instrument permettant d'influencer les décisions et les programmes sociaux, politiques et économiques de leur époque. La standardisation et la création de normes en sont deux aspects importants. Illustrons cela par deux exemples remarquables[18].

En 1926, l'Armée de l'air américaine se base sur une étude des caractéristiques physiques de centaines de pilotes d'avion pour standardiser les dimensions des postes de pilotage. Durant près de trente ans, la taille et la forme des sièges, la position des instruments de pilotage, la forme des casques… sont basées sur cette étude. A la fin des années 1940, les

[18] Voir Rose (2018).

responsables militaires constatent un grand nombre d'accidents et d'incidents qui leur font croire dans un premier temps à une certaine incompétence des pilotes. Mais bien vite, ils sont forcés de constater que ces « erreurs » ne semblent ni techniques, ni humaines. Que s'est-il donc passé ?

Les ingénieurs militaires commencent par se demander si les caractéristiques physiques des pilotes n'ont pas évolué depuis 1926. Une nouvelle enquête porte sur plus de quatre mille pilotes, de nouvelles moyennes sont calculées. Mais un lieutenant du nom de Daniels, qui a participé à cette enquête, se demande combien de « pilotes moyens » existent vraiment. En se basant sur dix caractéristiques physiques jugées les plus pertinentes pour concevoir un poste de pilotage et en admettant une certaine latitude par rapport aux moyennes calculées, il cherche à savoir combien de pilotes interrogés sont proches de ce pilote moyen. La réponse est implacable : zéro ! Sa conclusion est révolutionnaire : « Concevoir un poste de pilotage pour le pilote moyen revient en fait à n'en concevoir pour aucun ! ».

Un autre événement qui se passe quelques années plus tôt est aussi symptomatique de cette époque. Un gynécologue, le docteur Dickinson, est président de la Société de gynécologie américaine et président du département obstétrique de l'Association des médecins américains. C'est aussi un artiste. Il réalise une sculpture en utilisant des données de dimensions corporelles mesurées sur près de quinze mille jeunes femmes adultes. Il la place ensuite à l'entrée du musée de la santé de Cleveland. Elle est baptisée du nom de *Norma* : voilà la femme idéale à laquelle de nombreuses femmes vont se comparer. Un concours est même organisé pour récompenser la candidate qui se rapproche le plus de cet idéal féminin. Le nombre de concurrentes avoisine quatre mille. Sur les neuf facteurs de comparaison utilisés, aucune femme n'est proche de Norma. Sur cinq d'entre eux, moins de quarante restent en lice. Il y a bien eu une gagnante, mais pour oser dire qu'elle ressemblait à Norma…

Le belge ou le français moyen ont fait la une de plus d'un journal, comme le buveur moyen d'eau ou de bière ou encore la consommatrice moyenne de produits de beauté. Il n'y a pas si longtemps que des types de malades, de génies, de constructeurs… étaient cités comme des références. Même si la femme moyenne et l'homme moyen n'existent pas, ils ne sont pas encore prêts de mourir…

10 Conclusions

La moyenne arithmétique fut longtemps ignorée comme valeur de synthèse. La théorie des erreurs d'observation lui a donné un statut et une légitimité en astronomie. Elle est intimement liée à la loi normale et à ses propriétés de symétrie. Son usage dans l'étude des populations humaines en a fait un outil de gestion économique et sociale, mais aussi un instrument politique. Son implication dans les méthodes d'inférence statistique a renforcé son importance.

La moyenne représente un groupe d'individus, et non les individus eux-mêmes. Elle a permis d'affronter l'invasion de données qu'a connu le 19e siècle. À notre époque des *Big Data*, chaque individu produit des quantités de plus en plus nombreuses de données. Mais contrairement à ce qui s'est passé il y a deux siècles, l'outil informatique permet de prendre en compte toutes les données individuelles. Il n'est plus nécessaire de recourir systématiquement à une moyenne. Son rôle est ramené à de plus justes proportions ou, en tout cas, devrait l'être. Cela ne l'empêche pas d'être utile dans certaines circonstances comme, par exemple, la comparaison entre deux groupes d'individus. Connaître son histoire doit permettre au citoyen d'aujourd'hui et de demain d'en faire un usage judicieux. Ce n'est pas parce qu'on possède un indicateur dont l'expression formalisée possède des propriétés mathématiques intéressantes qu'il faut l'utiliser de manière systématique.

Références

[1] Bertillon L.-A. (1876), La théorie des moyennes en statistique, *Journal de la Société statistique de Paris*, **17**, 265-271 et 286-308.

[2] Dehon C., Droesbeke J.-J. et Vermandele C. (2015), *Éléments de statistique*, 6e édition revue et augmentée, collection SMA, Bruxelles, Éditions de l'Université de Bruxelles, Paris, Éditions Ellipses.

[3] Desrosières A. (1993), *La politique des grands nombres. Histoire de la raison statistique*, Paris, La Découverte.

[4] Droesbeke J.-J., Saporta G. et Thomas-Agnan Chr.(2015), La médiane et ses petits frères: une croissance difficile malgré leur robustesse, dans Droesbeke *et al.*, éds., *Méthodes robustes en statistique*, Paris, Technip, 1-15.

[5] Droesbeke J.-J. et Tassi Ph. (2015), *Histoire de la statistique*, Que-sais-je ?, 2e édition rééditée, Paris, Presses Universitaires de France.

[6] Droesbeke J.-J. et Vermandele C. (2006), Une expérience centralisatrice et dispersive, *Cahiers de l'IREM de Bruxelles,* **3***,* 47-71.

[7] Droesbeke J.-J. et Vermandele C. (2016), *Les nombres au quotidien. Leur histoire, leurs usages*, Collection La statistique autrement, Paris, Technip.

[8] Droesbeke J.-J. et Vermandele C. (2018), *Histoire(s) de(s) données numériques*, Collection Le monde des données, Paris, EDP Sciences.

[9] Galton Fr. (1869), *Hereditary Genius*, Londres, Macmillan.

[10] Hald A. (2003), *History of Probability and Statistics and their Applications before 1750,* New York, Wiley.

[11] Perrot J.C. (1992), *Une histoire intellectuelle de l'économie politique,* Paris, EHESS.

[12] Plackett R. L. (1958), The principle of the arithmetic mean, *Biometrika*, **45**, 130-135.

[13] Quintilien A. (1999), *La musique*, traduction et commentaires de Fr. Duysinx, Bibliothèque de la Faculté de Philosophie et Lettres de l'Université de Liège, Fasc. CCLXXVI.

[14] Quetelet A. (1835), *Sur l'homme et le développement de ses facultés,* ou *Essai de physique sociale*, 2 volumes, Paris, Bachelier.

[15] Quetelet A. (1869), *Physique sociale*, ou *Essai sur le développement des facultés de l'homme*, Bruxelles, Muquardt, Paris, Bailliere, Saint-Petersbourg, Issakoff.

[16] Quetelet A. (1846), *Lettres à S.A.R. le Duc Régnant de Saxe-Cobourg et Gotha, sur la théorie des probabilités appliquées aux sciences morales et politiques*, Bruxelles, Hayez.

[17] Raper S. (2017), The shock of the mean, *Significance*, December, 12-16.

[18] Rose T. (2018), *La tyrannie de la norme*, Paris, Pocket.

[19] Stahl S. (2006), The Evolution of the Normal Distribution, *Mathematics Magazine*, **79**, 2, 96-113.

[20] Stigler S. (2016), *The Seven Pillars of Statistical Wisdom,* Cambridge, Harvard University Press.