LES CONNAISSANCES D'ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE SUR LES CONCEPTS D'ÉCART MOYEN ET D'ÉCART TYPE

Sylvain VERMETTE[1]

TITLE

High school teachers' knowledge on the concepts of mean absolute deviation and standard deviation

RÉSUMÉ

La recherche décrite dans cet article vise à explorer les connaissances professionnelles en statistique d'enseignants de mathématiques du secondaire reliées aux concepts d'écart moyen et d'écart type. Par connaissances professionnelles, j'entends ici autant des connaissances qui sont articulées aux questions d'enseignement-apprentissage, qu'aux contenus à enseigner. Douze enseignants de mathématiques du secondaire du Québec ont été confrontés à des mises en situation faisant intervenir ces contenus scolaires. En plus de résoudre les tâches proposées sur les contenus, les enseignants étaient confrontés à des réponses et raisonnements d'élèves et, par le fait même, amenés à proposer des façons d'intervenir afin d'aider ces derniers à surmonter les obstacles dont leur raisonnement témoigne et favoriser du même coup leurs compréhensions statistiques. L'analyse des réponses des enseignants permet d'abord d'explorer les compréhensions et pratiques de ces enseignants, associées aux concepts d'écart moyen et d'écart type, et de porter un regard sur l'enseignement de ces concepts. Dans un deuxième temps, l'étude montre que des conceptions déjà observées chez des élèves sur ces contenus se retrouvent également chez ces enseignants du secondaire.

Mots-clés : *connaissances des enseignants, écart moyen, écart type.*

ABSTRACT

In this research, we explore teachers' statistical knowledge related to the concepts of mean absolute deviation and standard deviation. Twelve Quebec high school mathematics teachers were asked to respond to scenarios describing students' strategies, solutions and misconceptions when faced with a task based on these concepts. The teachers' responses primarily helped to analyze their comprehension and practices associated with the concepts of mean absolute deviation and standard deviation and also to gain insight on how to teach these concepts. Secondly, the study shows that students and high school teachers share the same conceptions on this subject.

Keywords: *teachers' knowledge, mean absolute deviation, standard deviation.*

1 Introduction

Au cœur même d'une ère où la technologie prend de plus en plus de place et où les informations fusent de toutes parts, l'utilisation de données statistiques est en pleine croissance (Connor, Davies et Holmes, 2006). De nos jours, un citoyen doit être à même d'avoir cette faculté d'analyse pour développer un jugement critique, une évaluation personnelle des données qui lui arrivent quotidiennement considérant que le citoyen d'aujourd'hui est continuellement confronté à des données et graphiques statistiques et qu'il

[1] UQTR, 3351 Des Forges, C.P. 500, Trois-Rivières (Québec), Canada, G9A 5H7, sylvain.vermette@uqtr.ca

est plus souvent nécessaire pour lui non pas de produire des statistiques, mais bien d'interpréter les résultats obtenus. Ainsi, les statistiques constituent une forme de langage qu'ils doivent maîtriser. La place tenue par la statistique dans la société actuelle fait donc en sorte qu'il devient fondamental de s'interroger sur l'enseignement de cette discipline dans l'intention de former ce que certains appellent le citoyen de demain. Si l'intention est de promouvoir le développement de la pensée statistique chez les élèves comme futur citoyen, il faut alors s'attarder à développer chez eux des compréhensions de base pour interpréter les données statistiques.

Ici, la dispersion des données est aussi importante que la tendance centrale pour décrire le phénomène observé. D'ailleurs, deux des principaux concepts de l'enseignement de la statistique présents dans les curriculums scolaires sont les mesures de tendance centrale et les mesures de dispersion. Avant le 21^{e} siècle, les recherches sur l'enseignement de la statistique ont accordé une grande importance à l'étude des mesures de tendance centrale au détriment de la dispersion et des mesures qui la caractérisent (Reading et Shaughnessy, 2004). Plusieurs travaux sur la didactique de la statistique font état d'un apprentissage de ces mesures orienté vers la maîtrise de techniques de calcul (Bakker, 2004). Il est connu que la compréhension du concept de moyenne est la plupart du temps basée sur son algorithme de calcul (Watson, 2007). Les travaux de Gattuso (1997) sur la moyenne ont démontré les impacts d'un enseignement dirigé vers l'application mécanique de l'algorithme. Elle a notamment constaté que la connaissance et l'application de l'algorithme de calcul n'est pas une condition suffisante pour assurer une bonne compréhension du concept visé et ce, autant pour les élèves du secondaire que pour les futurs maîtres. Comme pour la moyenne, l'application de l'algorithme de calcul de l'écart type n'est pas gage de la compréhension de ce concept. Les travaux de Makar et Confrey (2005) montrent entre autres que certains enseignants de mathématiques sont en mesure d'aborder la notion d'écart type de façon numérique à travers son calcul, mais sans pouvoir donner du sens au résultat obtenu comme mesure de dispersion. Cette emphase mise sur le calcul peut en partie être due à l'influence des manuels scolaires dont leur utilisation en mathématiques est généralisée au Québec. Un survol de trois collections de manuels scolaires[2] en mathématiques utilisées au secondaire au Québec mène au constat que l'étude des mesures de dispersion est concevable à partir de ceux-ci. Toutefois, il reste que de nombreux exercices, qui ont leur utilité, ne sont souvent que des applications de calculs au détriment d'un véritable exercice d'interprétation (Vermette, 2013).

Soulignant l'intérêt pour une compréhension du sens, Boyé et Comairas (2002) précisait que : « l'enseignement des statistiques ne se résumera pas à apprendre des formules et à les appliquer » (p. 37). Les statistiques sont trop souvent considérées comme une application d'algorithmes. Duperret (2001, dans Cyr et Deblois, 2007) mentionne que de telles applications mécaniques en statistique, non fondées sur une compréhension du sens, conduisent plus souvent à questionner « l'intérêt donné à l'enseignement des statistiques si on ne mesure pas son rôle de formation scientifique et sociale, et s'il se réduit à quelques recettes » (p. 9).

Suite à ce qui précède, si on veut promouvoir le développement de la pensée statistique chez les élèves, l'enseignement du concept de dispersion apparaît fondamental. Il convient donc de se demander quelles sont les connaissances des enseignants à ce sujet, car ces derniers accompagnent les élèves et organisent l'enseignement en offrant notamment un

[2] Visions des éditions CEC, Point de vue des éditions Grand Duc, Intersection des éditions de la Chenelière.

environnement propice aux élèves pour favoriser leurs apprentissages. On peut penser aussi que la connaissance des conceptions relatives à un concept particulier permet aux enseignants non seulement de mieux planifier leur enseignement, mais aussi de mieux organiser et gérer l'activité des élèves dans la classe de façon à ce que ceux-ci rencontrent les éléments d'un savoir mathématique visé.

Parallèlement au Québec, la formation à la statistique et à l'enseignement de cette discipline occupe une place peu importante dans les cursus universitaires de formation à l'enseignement, et ce, malgré le fait que la statistique prenne de plus en plus de place dans les programmes scolaires. À titre d'exemple, aucun cours n'est dédié en général de façon exclusive à la didactique de la statistique dans les programmes de formation des enseignants des universités québécoises, ce qui n'est pas le cas, notamment, pour la géométrie ou l'algèbre. On peut alors croire que la formation des enseignants de mathématiques quant aux concepts statistiques et à l'enseignement de ces concepts est minimale. Plusieurs travaux montrent d'ailleurs l'intérêt grandissant pour la formation chez les enseignants, autant du primaire que du secondaire, au niveau de leurs compréhensions des concepts statistiques qu'ils enseignent (e.g. Dabos, 2011; Garfield, delMas et Chance, 2007; Hill, Rowan et Ball, 2005; Silva et Coutinho, 2006). Cette intention permettrait de développer davantage ce que Skemp (1978) appelle une compréhension relationnelle des mathématiques qui peut se traduire par non seulement la connaissance du comment faire, mais aussi du pourquoi. Ces résultats soulèvent d'importantes questions concernant la nature des expériences statistiques auxquelles les enseignants peuvent être exposés durant leur formation professionnelle. Au même moment, on observe une reconnaissance grandissante que l'enseignant mobilise dans sa pratique des formes spécifiques de connaissances, différentes des formes standards apprises dans les cours de mathématiques universitaires (Moreira et David, 2005 ; Proulx et Bednarz, 2010, 2011). Les récents développements sur les connaissances mathématiques des enseignants montrent que certaines connaissances prennent leur source dans la pratique d'enseignement, donc reliées aux évènements émergeant du contexte d'enseignement-apprentissage (Bednarz et Proulx, 2009; Davis et Simmt, 2006). Cette interaction entre formation statistique et pratique de classe constitue un enjeu central du projet de recherche décrit dans le présent article.

Apprendre sur les connaissances des enseignants sur le concept de dispersion peut sans aucun doute fournir les bases à une meilleure compréhension de leurs capacités à enseigner ce concept. La question de recherche qui guide cet article est : quelles sont les connaissances des enseignants de mathématiques du secondaire en rapport avec les concepts d'écart moyen et d'écart type, soit deux mesures statistiques permettant de décrire la dispersion des données d'une distribution ? Dans ce qui suit, les ancrages théoriques sur le concept de dispersion en statistique qui orientent ce travail sont présentés ainsi qu'une clarification de ce que signifie les connaissances professionnelles des enseignants. Après avoir considéré les aspects méthodologiques de l'étude, l'analyse offre des exemples de stratégies d'enseignement associées à des tâches faisant intervenir les concepts d'écart moyen et d'écart type. L'article se termine avec une discussion des résultats sous l'optique de considérations pour la formation de futurs enseignants.

2 Cadre théorique

2.1 La dispersion des données

La variabilité des valeurs d'une variable statistique s'évalue principalement à l'aide des mesures de dispersion qui témoignent des variations des données présentes dans une distribution.

> « *Une mesure de dispersion permet de décrire un ensemble de données concernant une variable particulière, en fournissant une indication sur la variabilité des valeurs au sein de l'ensemble des données.* » (Dodge, 1993, p. 225)

Une mesure de dispersion très utilisée pour décrire la variabilité d'une distribution est sans aucun doute l'étendue. Son choix s'explique probablement non seulement par sa simplicité de calcul, soit faire la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la distribution, mais aussi par la simplicité à interpréter le résultat obtenu (la longueur du plus petit intervalle qui inclut toutes les valeurs de la distribution). Employée seule, l'étendue représente cependant un moyen limité pour mesurer la variabilité compte tenu que cette mesure de dispersion ne tient pas compte de l'influence de la fréquence de chacune des valeurs de la variable statistique sur la variabilité, d'où l'intérêt pour l'écart moyen et l'écart type, des mesures qui donnent une indication de la variabilité des valeurs d'une variable statistique en prenant en considération cette fois toutes les données de la distribution et permettant de connaître la dispersion des données par rapport au centre de la distribution, soit la moyenne de la distribution.

L'écart moyen consiste à calculer la moyenne de la valeur absolue des écarts à la moyenne. Le recours à la valeur absolue est nécessaire puisque les écarts négatifs contrebalancent les écarts positifs de telle façon que la somme de tous les écarts à la moyenne est toujours nulle. On peut considérer que cette transformation est implicite dans le concept d'écart qui, contrairement à celui de différence, renvoie spontanément à l'idée de distance incorporant ainsi cette notion de valeur absolue. L'écart moyen est une mesure qui permet d'avoir une bonne indication de la dispersion des données. Cependant, le recours à la valeur absolue pour éviter les écarts négatifs la rend peu favorable aux développements mathématiques et donc, plus difficilement exploitable dans la plupart des traitements statistiques (Shaughnessy et Chance, 2005). Quant à l'écart type, pour l'obtenir il suffit d'extraire la racine carrée de la variance, celle-ci se définissant comme étant la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Tout comme pour l'écart moyen, le calcul de la variance, et donc de l'écart type, permet d'éviter que les écarts négatifs n'annulent les écarts positifs puisque tous les écarts sont élevés au carré. En se basant sur des écarts élevés au carré, la variance présente l'inconvénient de ne pas être exprimée dans la même unité que celle dans laquelle les données de la distribution sont définies. Le fait de prendre la racine carrée de la variance pour obtenir l'écart type permet de revenir à l'unité de base. Un petit écart type ou un petit écart moyen signifie que les données de la distribution sont concentrées autour de la moyenne. Un grand écart type ou un grand écart moyen signifie évidemment le contraire.

Le défi d'interprétation semble toutefois plus grand dans le cas de ces mesures. Selon Delmas et Liu (2005), la compréhension de l'écart type, et par conséquent de l'écart moyen, englobe de nombreux concepts statistiques tels que la moyenne arithmétique, les écarts par rapport à la moyenne et la densité relative des données autour de la moyenne, ce qui peut expliquer les difficultés rencontrées par les enseignants à enseigner ce concept. Proulx (2017) souligne d'ailleurs que concevoir la moyenne comme mesure de tendance centrale implique une relation importante avec les mesures de dispersion dans le but de faire une analyse de la dispersion des données à l'intérieur de toute la distribution pour s'assurer que la moyenne est représentative de ces données, qu'elle est une mesure pertinente de la distribution, de sa tendance centrale. En fait, la moyenne a un véritable intérêt lorsqu'elle est interprétée en fonction des données de la distribution et de leur dispersion. Dans le même sens, comme l'écart type et l'écart moyen sont des mesures statistiques liées à la moyenne, ces mesures de dispersion n'ont d'intérêt qu'au regard de la distribution et de sa tendance centrale, ce qui permet entre autres de prendre en compte les effets des valeurs aberrantes sur ces mesures statistiques. À titre d'exemple, dans le cas d'une distribution asymétrique où la moyenne n'offre pas un portrait juste de la tendance centrale de la distribution, c'est davantage la médiane que la moyenne qui pourrait être représentative de la distribution et de sa tendance centrale (et la médiane serait alors reliée à l'étendue interquartile qui n'est pas influencée par les valeurs aberrantes de la distribution, étant basée sur le 1er et le 3^{e} quartile, et non à l'écart type ou à l'écart moyen). Bref, la compréhension de l'écart type ou de l'écart moyen nécessite une conception dynamique de la distribution qui coordonne tous ces concepts (Peters, 2014).

Face à ces défis, des travaux montrent que la compréhension de l'écart type et de l'écart moyen se limitent souvent à l'application de leur algorithme de calculs et soulignent par le fait même les difficultés des étudiants à mesurer la variabilité en termes de proximité des données par rapport au centre de la distribution (Cooper et Shore, 2010; Dabos, 2011; delMas et Liu, 2005; Meletiou-Mavrotheris et Lee, 2005). Il n'est donc pas surprenant de constater les difficultés rencontrés par des étudiants à définir le concept d'écart type et ce, même après avoir suivi un cours portant sur la statistique descriptive, se limitant pour la plupart au fait qu'il s'agisse d'une mesure de dispersion obtenue en extrayant la racine carrée de la variance (Dubreuil-Frémont, Chevallier-Gaté et Zendrera, 2014).

Les difficultés d'interprétation de l'écart type et de l'écart moyen sont d'autant plus vraies à partir de représentations graphiques. Selon Garfield et Ben-Zvi (2005), être en mesure de reconnaître et de comprendre la façon dont la dispersion des données se manifeste dans différentes représentations graphiques constitue un aspect important à travailler dans le développement de ce concept compte tenu que les représentations graphiques créent des obstacles en favorisant l'apparition de conceptions erronées de par leur apport visuel et ce, particulièrement dans le cas d'histogrammes et de diagramme à bandes. Les travaux de delMas et Liu (2005), Meletiou-Mavrotheris et Lee (2005) et Cooper et Shore (2008) ont montré qu'un certain nombre de stratégies viennent interférer lorsque vient le temps de traiter de la dispersion des données à partir de ces représentations graphiques. Par exemple, une première conception est d'interpréter la variabilité en fonction de la variation de la hauteur des bandes plutôt que sur la densité des données qui se situent aux alentours de la moyenne. Cette conception permet de conclure que plus la hauteur des bandes varie, plus la variabilité est grande et ainsi mener à associer par exemple un petit écart type ou écart moyen à une distribution dont les bandes de son graphique ont une hauteur uniforme. Une autre conception est d'associer une faible variabilité à une distribution symétrique. Ici, on peut croire que cette association peut être due à l'influence de la forme de la distribution qui laisse présager un contrebalancement parfait des écarts des valeurs de la variable statistique par rapport au centre de la distribution. Peu importe la forme de la distribution, rappelons que la somme de tous les écarts à la moyenne est toujours nulle. C'est d'ailleurs pour cette raison que lors du calcul de l'écart moyen, le recours à la valeur absolue est nécessaire pour que les écarts négatifs ne contrebalancent pas les écarts positifs.

Les exemples qui précèdent illustrent les difficultés possibles à mettre de l'avant une approche qui associe à la fois l'emplacement de la moyenne et les déviations par rapport à cette moyenne lorsque vient le temps d'interpréter la dispersion des données à partir de représentations graphiques. Ces difficultés peuvent être accentuées par le fait que ce volet semble négligé dans l'enseignement au secondaire où trop souvent l'accent est mis sur les règles qui régissent la construction des différentes représentations graphiques (Garfield et Ben-Zvi, 2005). On peut s'intéresser à l'allure générale du graphique, au maximum et au minimum ou aux données extrêmes, sans nécessairement développer une compréhension adéquate des relations existantes entre les différents concepts statistiques, en particulier le centre de la distribution et la dispersion des données par rapport à ce centre pouvant ainsi mener à l'étude des concepts d'écart moyen et d'écart type.

D'autres aspects relatifs à la variabilité des valeurs d'une variable statistique peuvent certainement être répertoriés. Toutefois, cette entrée en statistique descriptive sur la mesure de la variabilité en termes de proximité des données par rapport au centre de la distribution, à partir des mesures de dispersion que sont l'écart type et l'écart moyen ainsi que de leur interprétation graphique, constitue l'un des aspects privilégiés pour la construction des tâches soumises aux enseignants (voir section 3). Un autre aspect, lié cette fois aux connaissances mobilisées par les enseignants dans leur pratique, a également été mis de l'avant.

2.2 Connaissances professionnelles articulées à la pratique : des connaissances mathématiques aux connaissances statistiques

Inspirées des travaux de Shulman (1986, 1988), qui parle de *subject-matter content knowledge* et de *pedagogical content knowledge*, deux catégories de connaissances ont un intérêt particulier : la connaissance du contenu et la connaissance pédagogique du contenu. Shulman (1988) définit la connaissance du contenu comme étant la compréhension appropriée des objets d'étude par un spécialiste du contenu dans le domaine. Quant au *pedagogical content knowledge*, tel que l'explique Clivaz (2011, 2014), elle fait référence aux connaissances didactiques puisqu'elles sont spécifiques au contenu, mais relatives à l'enseignement et à l'apprentissage de la discipline. Les connaissances didactiques incluent une compréhension de la part de l'enseignant de ce qui rend l'apprentissage d'un contenu spécifique accessible ou non pour les élèves en se référant notamment à leurs conceptions, à la connaissance de leurs erreurs les plus fréquentes ainsi qu'aux interventions possibles pour aider les élèves à se rendre compte de leurs erreurs et à surmonter les obstacles dont elles témoignent. Les connaissances didactiques témoignent ainsi de l'aptitude à organiser et à gérer l'activité des élèves dans la classe de façon à ce que ceux-ci rencontrent les éléments d'un savoir mathématique visé (Bloch, 2009). Les connaissances didactiques font ainsi référence à la façon d'aborder et de représenter un sujet afin que celui-ci soit compréhensible aux yeux des autres. Avec ce type de connaissances, on va au-delà de la connaissance du contenu pour se concentrer sur une autre dimension, soit la connaissance du contenu à des fins d'enseignement (Holm et Kajander, 2012 ; Proulx, 2008).

Ces deux types de connaissances, bien qu'il soit possible de les dissocier au regard de ce qui précède, sont interreliés et très difficilement distinguables dans la pratique (Even, 1993 ; Even et Tirosh, 1995). Ainsi, l'intention de ce travail n'est pas de distinguer la connaissance du contenu de la connaissance pédagogique du contenu, mais s'aligne plutôt avec la conceptualisation des mathématiques professionnelles s'inspirant des travaux de Proulx et Bednarz (2010, 2011) et Moreira et David (2005), qui tracent une distinction entre les mathématiques académiques et les mathématiques scolaires en tant que champs de connaissances différents. Par exemple, lors de l'enseignement-apprentissage de concepts mathématiques, plusieurs évènements mathématiques émergent et sont pris en compte par l'enseignant : des raisonnements (adéquats ou non) permettant de donner un sens aux concepts ; des conceptions, difficultés et erreurs sur les concepts travaillés et leurs compréhensions ; des stratégies et approches diverses pour résoudre un problème ; des représentations et symbolismes/écritures variées (standards ou non) pour exprimer une solution ; des questions nouvelles et avenues à explorer, etc. Ces évènements mathématiques ne réfèrent pas uniquement aux concepts présents dans les documents curriculaires, qui établissent ce qui doit être enseigné, mais réfèrent aussi aux éléments mathématiques qui entourent l'enseignement-apprentissage des mathématiques et avec lesquels l'enseignant doit travailler en classe. Les mathématiques professionnelles de l'enseignant renvoient donc à un corpus de connaissances et de pratiques mathématiques qui sont articulées aux questions d'enseignement-apprentissage des mathématiques (Bednarz et Proulx, 2010). Il apparaît donc de cette conceptualisation des connaissances mathématiques mobilisées par l'enseignant dans sa pratique deux dimensions importantes. D'abord, ces connaissances sont situées (Lave, 1988), elles s'élaborent dans un certain contexte lié à la pratique d'enseignement. Celles-ci ne sont pas indépendantes de l'apprentissage des élèves. Ensuite, ces connaissances sont ce que Mason et Spence (1999) appellent « knowing-to act in the moment ». Ainsi, ce savoir-enseigner de l'enseignant se construit et s'adapte en temps réel à la situation, en réaction à celle-ci. On parle ici de connaissances déployées sur-le-champ, liées à l'intervention en réponse à un évènement (un script qui sort de la planification prévue, une question d'élève, une réponse inattendue, une erreur non prévue, etc.).

Cette orientation sur des mathématiques articulées à la pratique est au cœur de la recherche décrite dans cet article (Even, 1993 ; Even et Tirosh, 1995). Ici, les connaissances professionnelles d'enseignants de mathématiques du secondaire sont étudiées sous deux angles à partir de tâches faisant intervenir des contenus scolaires en statistique et des raisonnements d'élèves associés à ces contenus (voir section 3). Le premier concerne la connaissance des concepts d'écart moyen et d'écart type par les enseignants. Ces derniers sont-ils capables dans un premier temps de réaliser la tâche et de repérer les erreurs des élèves ? Le second concerne leur capacité à intervenir auprès des élèves pour leur donner à réfléchir à partir de leurs erreurs.

3 Méthodologie

Le projet, qui fait partie d'un programme de recherche plus large axé sur des questions liées à l'enseignement de la statistique ayant comme objectif le développement et l'analyse de formations pour enrichir l'expérience statistique, est à caractère exploratoire. Pour répondre à la question de recherche, soit d'en connaître davantage sur les connaissances professionnelles en statistique d'enseignants de mathématiques du secondaire sur les concepts d'écart moyen et d'écart type, des entrevues, organisées autour de la résolution de tâches spécifiques (voir plus bas) et d'un questionnement préalablement préparé, ont été développées comme méthode de collecte de données afin d'obtenir les réponses des participants pour arriver à mieux saisir leurs capacités à enseigner ce concept.

Les entrevues ont été menées auprès de douze enseignants de mathématiques au secondaire du Québec. Les douze participants provenaient de différentes écoles et participaient à cette étude sur une base volontaire. Ils avaient tous suivi un cours de statistique dans le cadre de leur formation universitaire en enseignement des mathématiques au secondaire et avaient minimalement cinq années d'expérience dans l'enseignement des mathématiques au secondaire. Puisque la passation des entrevues s'effectuait en fin d'année scolaire, ceux-ci avaient également tous enseigné un module statistique à leurs élèves au courant de l'année où ils ont entre autres interprété et analysé des distributions statistiques. L'expérimentation comportait une entrevue où les enseignants étaient confrontés à des mises en situation faisant intervenir les concepts d'écart moyen et d'écart type. Celles-ci consistaient à analyser des contenus d'enseignement ainsi qu'à réfléchir sur l'appropriation de ces contenus par l'apprenant à travers l'analyse de solutions et raisonnements d'élèves et, par le fait même, à proposer une intervention possible pour faire avancer leurs raisonnements et compréhensions mathématiques. Toutes ces modalités ont permis d'en connaître davantage sur les connaissances professionnelles des enseignants, des connaissances qui sont directement reliées aux questions d'enseignement-apprentissage des mathématiques et à leurs pratiques de classe, liées aux concepts d'écart moyen et d'écart type.

Dans ce qui suit, deux mises en situation confrontant les enseignants à des réponses et raisonnements d'élèves sont présentées à titre illustratif. Celles-ci sont construites sur la base d'analyses de contenus statistiques liés aux concepts d'écart moyen et d'écart type (analyses didactiques, conceptuelles et épistémologiques ; Brousseau, 1998) et inspirées d'analyses provenant des recherches conduites dans le domaine (Cooper et Shore, 2008 ; delMas et Liu, 2005 ; Meletiou-Mavrotheris et Lee, 2005).

Premier exemple de mise en situation

Temps 1 : Résoudre le problème

Voici un problème tiré d'un manuel[3] de quatrième secondaire :

PROBLÈME

Parce que vous aimeriez un jour devenir pilote de course automobile, vous cherchez à déterminer quelle est la meilleure écurie. Vous consultez des statistiques sur les pannes survenues selon le nombre de kilomètres parcourus. Pour les écuries Dana et Toyo, vous trouvez les résultats ci-dessous.

Nombre de kilomètres parcourus avant que la voiture de l'écurie Dana tombe en panne :
65, 84, 87, 91, 97, 103, 107, 109, 114, 118, 122, 133, 136, 137, 140, 142, 145, 147, 152

Nombre de kilomètres parcourus avant que la voiture de l'écurie Toyo tombe en panne :
85, 89, 91, 102, 106, 106, 115, 115, 117, 120, 121, 129, 133, 136, 143, 165, 170, 170, 197

Selon vous, la voiture de quelle écurie est la plus fiable dans une course de 100 km ? Justifiez votre réponse.

Temps 2 : Réponse d'élève au problème et interventions

À cette question, un élève arrive à la conclusion que la voiture la plus fiable est celle de l'écurie Dana compte tenu que l'écart moyen de la distribution qui lui est associée est

---

[3] Manuel Point de Vue, 2[e] année du 2[e] cycle du secondaire, séquence technico-sciences, p. 217 ; manuel Point de Vue, 2[e] année du 2[e] cycle du secondaire, séquence culture, société et technique, p. 179.

inférieur à celui de l'autre écurie. Pourtant, en observant le corrigé proposé par le manuel[4], il est indiqué que la voiture qui semble la plus fiable est celle de l'écurie Toyo et on comprend que le calcul de l'écart moyen est escompté pour répondre à la question, le tableau qui suit étant présenté en guise de justifications. Qu'en pensez-vous ?

Écurie	***Moyenne***	***Médiane***	***Écart moyen***
Dana	*117,32 km*	*118 km*	*20,93 km*
Toyo	*126,84 km*	*120 km*	*24,03 km*

Cette mise en situation est intéressante compte tenu qu'elle est liée à une question d'un manuel scolaire utilisé dans certaines écoles du Québec et donc, d'un outil de référence possible pour les enseignants. Ici, le concept d'écart moyen intervient à travers la dispersion des données de deux distributions. La tâche proposée à l'enseignant découle d'un raisonnement fautif d'un élève qui n'interprète pas l'écart moyen en fonction de la moyenne de la distribution. Pour l'écurie Dana, si on enlève la valeur d'un écart moyen (20,93 km) à la moyenne qui est de 117,32 km, on se retrouve en dessous de la limite de 100 km ce qui n'est pas le cas pour l'écurie Toyo.

Deuxième exemple de mise en situation[5]

Temps 1 : Résoudre le problème

Une enseignante a recueilli des statistiques tout au long de l'année sur la quantité d'eau bue mensuellement par les élèves de secondaire 4 de son école. Dans l'école, il y a trois groupes de secondaire 4 composé chacun de 27 élèves. Les statistiques qu'elle a recueillies se retrouvent dans la figure 1 qui suit. Au regard des groupes A, B et C, quelle distribution a le plus grand écart type ? Quelle distribution a le plus petit écart type ? Justifiez vos choix.

[4] Manuel Point de Vue, 2e année du 2e cycle du secondaire, séquence technico-sciences, p. 396 ; manuel Point de Vue, 2e année du 2e cycle du secondaire, séquence culture, société et technique, p. 346.

[5] Inspirée de Meletiou-Mavrotheris et Lee, 2005.

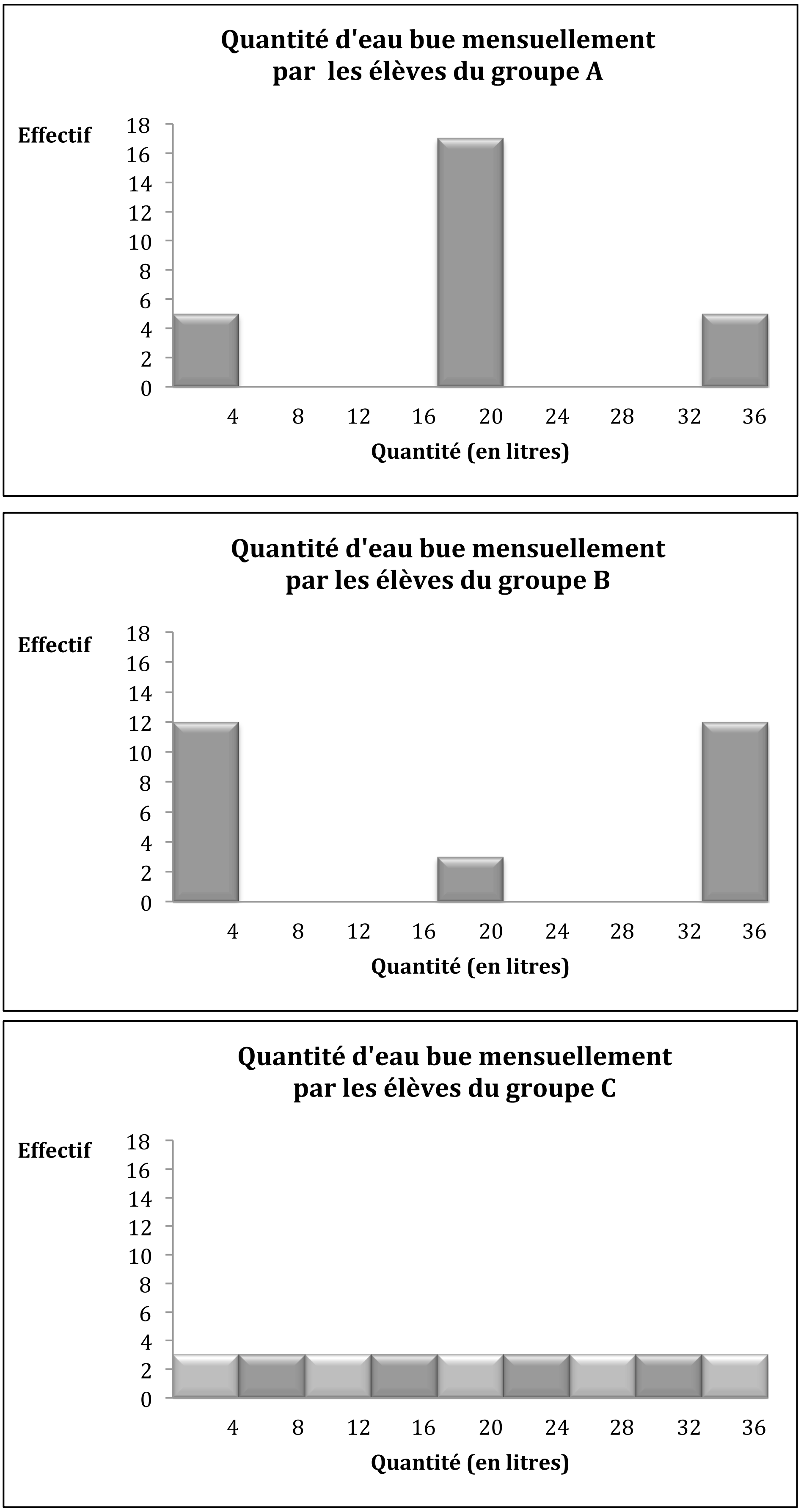

FIGURE 1 – *Quantité d'eau bue mensuellement par les élèves de secondaire 4*

Temps 2 : Réponse d'élèves au problème et interventions

À cette question, deux élèves en arrivent à une conclusion différente pour le groupe C.

Le premier affirme que la représentation graphique du groupe C illustre la distribution avec le plus grand écart type. Ce dernier s'appuie sur le fait que la représentation graphique du groupe C est celle qui comprend le plus grand nombre de barres. Ceci étant indicateur d'une grande variété de quantité d'eau bue mensuellement par les élèves, il conclut donc que cette distribution admet le plus grand écart type.

Le second élève, quant à lui, affirme que la représentation graphique du groupe C illustre la distribution avec le plus petit écart type. Son argumentation est basée sur le fait que les barres de la représentation graphique du groupe C ont une hauteur uniforme et par conséquent, que cette distribution admet nécessairement le plus petit écart type.

Qui a raison ? Comment interviendriez-vous auprès de ces élèves ?

Dans cette mise en situation, le concept d'écart type intervient à travers la dispersion des données de deux distributions représentées par des histogrammes. La distribution ayant le plus petit écart type est celle du groupe A et la distribution ayant le plus grand écart type est celle du groupe B. La tâche proposée à l'enseignant découle de raisonnements fautifs d'élèves. Le choix pour les deux raisonnements d'élèves mis de l'avant dans cette question est basé notamment sur les travaux de Cooper et Shore (2008), delMas et Liu (2005) ainsi que Meletiou-Mavrotheris et Lee (2005) qui ont montré que certains étudiants étaient influencés par des aspects associés à la forme de la distribution lorsqu'ils étaient appelés à interpréter la dispersion d'une distribution à partir d'un diagramme à bandes ou d'un histogramme. Le premier élève dans sa réponse est influencé par le nombre de bandes. Le nombre de bandes n'est pas un indicatif d'un grand écart type. En associant incorrectement le groupe ayant le plus grand nombre de valeurs différentes pour l'écart à la moyenne, le groupe C, à la distribution ayant le plus grand écart type, l'élève fait abstraction de la grandeur des écarts et de l'effectif associé à chacun d'eux. Aussi, en suivant cette logique, il serait difficile d'identifier le groupe avec le plus petit écart type puisque les deux groupes restants (A et B) ont le même nombre de bandes. Le second élève quant à lui est influencé par la non-variation de la hauteur des bandes de la distribution du groupe C. Par ce raisonnement, l'élève fait référence aux variations des effectifs et non aux variations de quantité d'eau bue mensuellement par les élèves.

Ces exemples de mises en situation avaient pour objectif de voir si les enseignants interrogés étaient en mesure d'évaluer la dispersion des données d'une distribution en fonction de sa moyenne et de voir de quelles façons les enseignants interrogés pouvaient intervenir sur des conceptions d'élèves liées à l'étude des concepts d'écart moyen et d'écart type, donc de mieux comprendre la nature des interventions qu'ils feraient. D'autres questions furent aussi posées pendant l'entrevue, en fonction des réponses obtenues par les enseignants, dans le but de clarifier leurs propos et de dégager une compréhension plus approfondie des connaissances professionnelles en statistique que ces derniers mobilisaient en lien avec les concepts d'écart moyen et d'écart type. La position d'interviewer n'en n'était toutefois pas une d'enseignant et donc, aucune explication ne fut donnée au cours de l'entrevue. Enfin, les entrevues ont été enregistrées sur bande audio et les propos des enseignants et de l'interviewer ont été retranscrits avant d'être analysés. L'analyse des données fut ainsi réalisée à travers des lectures et interprétations répétées des verbatims au sujet des stratégies qui ont émergé durant les entrevues, à l'aide des dimensions sur le concept de dispersion des données formulées à la section 2.1. Le but premier de l'analyse des données offerte ici est donc d'illustrer la nature des stratégies déployées par les enseignants en contexte statistique faisant intervenir les concepts d'écart moyen et d'écart type.

4 Résultats

Les résultats montrent que tous les enseignants ont vu l'écart moyen et l'écart type comme des indicateurs de la dispersion des données d'une distribution et qu'à un petit écart moyen ou un petit écart type est associé une distribution ayant une faible dispersion des données et vice versa. Toutefois, il fut difficile pour la majorité de ces enseignants d'évaluer la dispersion des données en fonction de leur proximité par rapport au centre de la distribution, ce qui porte à croire que plusieurs d'entre eux ont une connaissance de ces concepts limitée à leur algorithme de calcul. Dans ce qui suit, les difficultés d'interprétation de ces mesures statistiques rencontrées par les enseignants sont illustrées à partir des deux mises en situation présentées précédemment.

4.1 Première mise en situation

Pour la première mise en situation, cinq enseignants ont refusé le raisonnement de l'élève et ont vu l'enjeu soit d'interpréter l'écart moyen de ces deux distributions en fonction de leur moyenne. Ceci s'est traduit chez tous les enseignants par des explications à l'élève en référence à l'interprétation de l'écart moyen. Par exemple :

> *Tu as une moyenne de 126. Ton écart moyen est de… est de 24, tu es encore mieux que 100. Tu comprends ? Les données, leur écart moyen… Tu sais, l'écart moyen veut dire : j'ai ma moyenne et je m'en vais à peu près à 24 de là. Tu sais, de 126 à 102.*

L'un d'eux a également contesté le problème et la solution proposée par le manuel puisque le calcul de l'écart moyen n'est pas nécessaire pour répondre à la question selon lui. La voiture de l'écurie Toyo a franchi la distance escomptée 16 fois sur 19 ou environ 84% du temps contrairement à 14 fois sur 19 ou environ 74% du temps pour l'écurie Dana. Ce raisonnement apparaît suffisant ici pour répondre à la question et conclure que la voiture de l'écurie Toyo semble plus fiable.

> *Si c'est une question qui va générer des réponses différentes, à priori, ça ne me dérange pas. Mais celle-là, je la trouvais plutôt… Ou je suis passé complètement à côté, mais t'sais, j'avais l'impression qu'elle ne demandait pas une si grande réflexion. Moi, j'ai regardé t'as combien de chance ? Je veux savoir pour qu'elle soit fiable pour 100 km, je vais donc regarder le nombre de fois qu'il a été au-dessus de 100 km. C'est comme son % d'efficacité… Parce que tout le reste, que l'autre ait une moyenne vraiment élevée, on s'en fout que sa moyenne soit élevée.*
> […]
> *Si tu regardes l'écart moyen… Plus ou moins l'écart moyen, ça donne quel intervalle ? Plus ou moins un écart moyen, oui, ça aurait pu être ça. Mais par rapport aux 100 km qui était là… Moi, je trouvais que c'était complètement inutile. Ben c'est pour ça que je trouvais le problème poche. Honnêtement. Puis en fait, ça me surprend plus ou moins du manuel que je trouvais qu'il était un peu plus axé sur moins de réflexion puis sur plus de calculs.*
> […]

La question est mauvaise. Si ta question peut générer une réponse puis ne fait pas ressortir ce que tu voudrais faire ressortir, bien il faut que tu travailles ta question.

Bien entendu, certains enseignants n'ont pu identifier l'erreur ou du moins reconnaître que le raisonnement de l'élève était erroné. Ainsi, pour cette mise en situation, sept enseignants n'ont pas compris la solution proposée par le corrigé du manuel et étaient en quelque sorte en accord avec le raisonnement de l'élève. Ces derniers n'ont pas compris pourquoi le corrigé du manuel affirme que la voiture de l'écurie Toyo semble être la plus fiable compte tenu que l'écart moyen de la distribution présentant les statistiques sur les pannes survenues selon le nombre de kilomètres parcourus est plus grand chez l'écurie Toyo que chez l'écurie Dana.

L'écart moyen est plus grand puis il donne cette réponse-là… il se sert de ça pour dire que c'est Toyo le meilleur ?

Ces derniers n'ont pas été en mesure d'interpréter l'écart moyen en fonction de la moyenne. Deux d'entre eux analysaient d'ailleurs initialement la situation uniquement au regard de la moyenne de chacune des distributions afin de justifier leur choix et affirmaient que la voiture de l'écurie Toyo semblait plus fiable puisque la moyenne de kilomètres parcourus par la voiture de cette écurie est plus élevée en comparaison avec celle de l'écurie Dana. En raisonnant ainsi, on ne tient pas compte de la dispersion des données.

4.2 Deuxième mise en situation

Des cinq enseignants qui avaient refusé le raisonnement de l'élève à la première mise en situation et qui avaient vu l'enjeu soit d'interpréter l'écart moyen des deux distributions en fonction de leur moyenne, trois ont refusé le raisonnement des deux élèves et ont vu de nouveau l'enjeu soit d'interpréter la dispersion des données de ces distributions représentées graphiquement en fonction de la moyenne. Ces derniers ont proposé une intervention dans le but de faire prendre conscience à ces élèves que la représentation graphique du groupe C illustre ni la distribution avec le plus grand écart type, ni la distribution avec le plus petit. Ceci s'est traduit pour un enseignant par des explications en référence au calcul de l'écart type.

Dans le fond, je vais être honnête là. À part de lui montrer par calcul, je ne saurais pas comment lui montrer. [le sujet fait référence ici au calcul de l'écart type pour les trois distributions] *C'est sûr qu'il y a probablement d'autres façons, mais j'aurais trop peur de le montrer d'une autre façon, après ça, dans une autre situation où est-ce que ça ne serait pas fait de cette façon-là ; qu'ils essaient de le faire par raisonnement puis qu'ils se trompent. T'sais… Moi, dans cette optique-là, je suis… En tant que prof, bien souvent, j'aime mieux leur montrer les méthodes « safe » comme on dit.*

Les deux autres enseignants, dont celui qui a critiqué la pertinence du problème dans la mise en situation précédente, ont plutôt proposé des explications en référence à la concentration des données se situant autour de la moyenne. Par exemple :

Tu sais, un élève qui dit : « Moi, c'est le C qui a le plus petit écart type, parce que les barres sont toutes à la même hauteur. », je lui répondrais non, parce que quand même que tu as des extrêmes qui sont les mêmes, c'est-à-dire entre 0 et 4 puis entre 32 et 36, dans le graphique A, tu as une répartition plus juste autour de ta moyenne que dans le graphique B par exemple où tu as vraiment beaucoup de monde au début, beaucoup *de monde à la fin, pratiquement personne entre les deux. Tandis que là, avec le groupe C, tu as du monde partout en même quantité.*

Le quatrième enseignant s'est appuyé sur la concentration des données dans la classe moyenne. En comptant le nombre d'individus hors de la classe moyenne, on en vient à identifier la distribution des groupes B et C comme celles avec le plus petit écart type, puisqu'elles ont le même nombre de données se situant à l'extérieur de la classe moyenne. Cette conception ne tient pas compte de la valeur des écarts à la moyenne des données situées hors de la classe moyenne.

Pour le grand écart type, j'ai mis B et C, parce que 24 des 27 répondants n'étaient pas dans la classe moyenne.

Le cinquième enseignant quant à lui a été influencé par la symétrie des distributions. Comme ces trois distributions sont symétriques, ce dernier a déduit qu'elles avaient le même écart type en pensant que les écarts positifs contrebalançaient parfaitement les écarts négatifs. Ci-dessous, le discours tenu par cet enseignant.

Ben moi, j'ai calculé la moyenne partout. Ça m'a donné 18. Puis, après ça, j'ai dit que les distributions sont symétriques puis que l'écart type, c'est la valeur des écarts, j'ai donc affirmé que les 3 distributions avaient le même écart type.
[…]
Même si les écarts sont plus grands, mais que c'est une moyenne des écarts, j'ai dit qu'ils auraient le même écart type. [le sujet se base sur le fait que la somme des écarts à la moyenne est nulle pour chaque distribution, c'est-à-dire que les écarts positifs contrebalancent parfaitement les écarts négatifs]

Pour ce qui est des sept autres enseignants, comme pour la mise en situation précédente, ces derniers n'ont pas été en mesure de voir l'enjeu. Deux enseignants ont spécifié qu'ils ne pouvaient répondre à la question, étant embêtés face à ces raisonnements. Trois autres ont préconisé le raisonnement du second élève, étant à leur tour influencés par la variation de la hauteur des barres des histogrammes, en affirmant que l'on retrouve le plus petit écart type dans le groupe C, puisque son graphique comporte des barres d'une hauteur uniforme, et le plus grand écart type dans le groupe A où son graphique témoigne d'une plus grande variation dans la hauteur des barres.

Le plus petit, c'était le 3ème, parce que l'écart moyen était le plus petit, les données étaient plus homogènes [en parlant du fait que la hauteur des barres est uniforme dans le groupe C] *puis le plus grand, ce serait le premier, parce que les données sont plus dispersées… la différence, ici, entre ça puis ça* [le sujet illustre les écarts entre la hauteur des barres]. *Il y a une plus grande variation dans les effectifs, 12 de différence. De 17 à 5.*

Les deux derniers enseignants ont quant à eux favorisé le raisonnement du premier élève en quantifiant le nombre de possibilités (nombre de barres) pour chacun des groupes. Pour le plus grand écart type, ce raisonnement mène à choisir le groupe C puisqu'il y a plus de possibilités dans ce groupe (plus de barres).

Moins de possibilités donc moins de variabilité [en parlant de la représentation graphique du groupe A]. *T'sais ici, il y a combien de réponses possibles ? T'en as 1-2-3. Donc ça veut dire que l'écart type est petit en comparaison avec le groupe C.*

5 Discussion sur les résultats et leurs implications

La recherche décrite dans cet article prend appui sur les compréhensions des enseignants en contexte statistique à travers l'exploration de diverses mises en situation ancrées à leur contexte de pratique et faisant intervenir les concepts d'écart moyen et d'écart type. Si on veut promouvoir le développement de la pensée statistique chez les élèves, l'intérêt pour la dispersion des données ne fait aucun doute et donc, l'enseignement des concepts d'écart moyen et d'écart type se veut fondamental.

Comme Makar et Confrey (2005), nous remarquons que l'enseignement des concepts d'écart type et d'écart moyen semble constituer un important défi conceptuel pour les enseignants. Il est vrai que les interventions proposées par certains enseignants de mathématiques que nous avons observées sont très riches, alors qu'elles dépassent un simple enseignement de l'algorithme et qu'elles témoignent d'un désir de développer une vision globale de la distribution. Il suffit de rappeler en particulier l'intervention proposée par l'enseignant qui critique la pertinence du problème du manuel et la solution proposée. Par contre, compte tenu de la complexité des concepts en jeu, la plupart des interventions comportent non seulement certaines limitations conceptuelles, comme c'est le cas notamment pour l'enseignant qui évalue l'écart type en fonction de la concentration des données dans la classe moyenne ne tenant ainsi pas compte de la valeur des écarts à la moyenne des données situées hors de la classe moyenne, mais font également ressortir des conceptions relatives à ces contenus statistiques déjà observées chez des élèves et chez des étudiants universitaires. Par exemple, lorsque confrontés à un exercice d'interprétation de l'écart type à partir d'histogrammes, certains enseignants étaient influencés par des aspects associés à la forme de la distribution comme la variation de la hauteur des bandes, le nombre de bandes ainsi que la symétrie de la distribution. Ces constats quant à la compréhension de ces mesures de dispersion font écho aux travaux de Dabos (2011) et souligne l'intérêt grandissant pour la formation chez les enseignants au niveau de leurs compréhensions des concepts statistiques qu'ils enseignent. En effet, il semblerait que les concepts d'écart moyen et d'écart type ne soient pas porteur de sens pour la majorité des répondants où plus de la moitié d'entre eux étaient embêtés face aux raisonnements d'élèves proposés et ce, pour les deux mises en situation présentées. Ces derniers n'ont pas vu l'enjeu soit d'interpréter la dispersion des données en fonction du centre de la distribution et ont semblé avoir une connaissance de ces mesures statistiques limitée à leur algorithme de calcul comme c'est souvent le cas pour la moyenne (Watson, 2007). Rappelons l'intervention proposée par l'un des enseignants pour la deuxième mise en situation qui se résume par des explications données à l'élève en référence au calcul de l'écart type, ce dernier ne voyant pas d'autres façons d'intervenir.

Afin de permettre à leurs élèves de développer un sens approfondi des mesures statistiques, il serait non seulement important pour les enseignants du secondaire de lier les mesures de tendance centrale aux mesures de dispersion, mais aussi de porter une attention spéciale aux passages conceptuels nécessaires entre l'apprentissage de ces mesures et leur interprétation à partir de représentations graphiques compte tenu que celles-ci semblent poser problème en favorisant l'apparition de conceptions erronées. Ceci permettrait d'enrichir l'expérience d'apprentissage de la statistique offerte aux élèves. Simultanément, une analyse de curriculums du secondaire montre que les notions statistiques sont souvent présentées de façon morcelée d'année en année (Gattuso et Vermette, 2013). Au Québec par exemple, les mesures de tendance centrale sont principalement enseignées en troisième secondaire (14 ans) tandis que les mesures de dispersion que sont l'écart type et l'écart moyen figurent au programme de 4^{e} secondaire (15 ans). Il est possible que le fait de promouvoir une approche où l'on étudie de façon séparée les différents concepts en statistique n'incite pas nécessairement à une analyse globale et au développement de la pensée statistique. Par expérience, il n'est pas rare de voir par exemple les élèves de troisième secondaire se limiter au calcul de la moyenne comme fin d'analyse lors de la comparaison de deux distributions.

Des résultats émergent des considérations pour la formation de futurs enseignants. Étant bien conscients du défi que représente l'enseignement de l'écart type et de l'écart moyen pour les enseignants, il apparaît primordial de continuer à réfléchir à des pistes pour contribuer au développement professionnel des enseignants, notamment en tentant de mieux comprendre les difficultés didactiques rencontrées par ces derniers dans ce contexte. Bien entendu, les mises en situation présentées constituent une amorce de pistes de réflexion qui pourraient être exploitées en classe et servir par le fait même à la formation de futurs enseignants. Mais plus important encore est le constat que certains pouvaient réagir sur le champ aux réponses et raisonnements d'élèves en proposant des interventions pertinentes, alors que d'autres non, démontrant par le fait même des connaissances professionnelles insuffisantes relatives aux concepts d'écart moyen et d'écart type.

Ce contexte soulève de nombreuses préoccupations et pointe vers l'intérêt d'approfondir des formations en statistique chez les enseignants et ce, afin de continuer à développer leur capacité à intervenir en classe en contexte statistique pour contribuer au développement de la pensée statistique des élèves. L'intérêt de s'attarder aux connaissances professionnelles des enseignants en contexte statistique et à la façon dont ceux-ci les mobilisent dans leurs pratiques de classe est d'autant plus important compte tenu de la spécificité du raisonnement statistique. Il apparaît nécessaire d'expliciter ces connaissances afin que celles-ci deviennent conscientes de sorte que les enseignants puissent les mobiliser au moment opportun dans leurs pratiques de classe. Il va de soi, que la recherche sur l'apprentissage des élèves est nécessaire puisqu'elle doit servir de base à la création de situations didactiques articulées au contexte d'enseignement-apprentissage afin de permettre aux enseignants d'acquérir une aisance avec les façons de raisonner des élèves en contexte statistique et à penser à des façons d'intervenir auprès d'eux pour faire avancer leurs raisonnements et compréhensions mathématiques. Cette orientation sur des mathématiques articulées à la pratique, ici celles statistiques, qui ne renvoient pas à des mathématiques considérées pour elles-mêmes, déconnectées et décontextualisées de la pratique, est au cœur de mon programme de recherche lié à l'enseignement de la statistique.

Références

[1] Bakker, A. (2004), Reasoning about shape as a pattern in variability, *Statistics Education Research Journal*, **3**(2), 64-83.

[2] Bednarz, N. et Proulx, J. (2009), Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques, *For the learning of mathematics,* **29**(3), 11-17.

[3] Bednarz, N. et Proulx, J. (2010), Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : exploration de mathématiques enracinées dans leurs pratiques, *Éducation et Formation*, e-293, 21-36.

[4] Bloch, I. (2009), Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation?, *Petit x*, 81, 25-52.

[5] Boyé, A. et Comairas, M.-C. (2002), Moyenne, médiane, écart type : quelques regards sur l'histoire pour éclairer l'enseignement des statistiques, *Repères-IREM*, 48, 27-39.

[6] Brousseau, G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*, La pensée sauvage.

[7] Cooper, L. et Shore, F. (2008), Students' misconceptions in interpreting center and variability of data represented via histograms and stem-and-leaf plots, *Journal of Statistics Education*, **15**(2), 1-13.

[8] Cooper, L. et Shore, F. (2010), The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability, *Journal of statistics education*, **18**(2), 1-16.

[9] Clivaz, S. (2011), *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*, Thèse de doctorat, Université de Genève, Genève.

[10] Clivaz, S. (2014), *Des mathématiques pour enseigner ? Quelle influence les connaissances mathématiques des enseignants ont-elles sur leur enseignement à l'école primaire ?*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

[11] Connor, D., Davies, N. et Holmes, P. (2006), Using real data and technology to develop statistical thinking. *In* G. F. Burrill (dir.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance: 68th Yearbook (p. 185-194),* Reston, VA : NCTM.

[12] Cyr, S. et Deblois, L. (2007), La cote standard comme objet pour réfléchir aux notions statistiques avec les futurs maîtres, *Petit x*, 75, 50-73.

[13] Dabos, M. (2011), *Two-Year College Mathematics Instructors' Conceptions of Variation,* Thèse de doctorat en éducation, University of California, Santa Barbara, CA.

[14] Davis, B. et Simmt, E. (2006), Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know, *Educational Studies in Mathematics,* **61**(3), 293-319.

[15] Delmas, R. et Liu, Y. (2005), Exploring students' conceptions of the standard deviation, *Statistics Education Research Journal*, **4**(1), 55-82.

[16] Dodge, Y. (1993), *Statistique : dictionnaire encyclopédique*, Université de Neuchâtel, Suisse.

[17] Dubreil-Frémont, V., Chevallier-Gaté, C. et Zendrera, N. (2014), Students' conceptions of average and standard deviation. Dans K. Makar, B. de Sousa et R. Gould (dir.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9),* Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

[18] Even, R. (1993), Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education,* **24**(2), 94-116.

[19] Even, R. et Tirosh, D. (1995), Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 1-20.

[20] Garfield, J. et Ben-Zvi, D. (2005), A framework for teaching and assessing reasoning about variability, *Statistics Education Research Journal*, **4**(1), 92-99.

[21] Garfield, J., delMas, R. et Chance, B. (2007), Using students' informal notions of variability to develop an understanding of formal measures of variability. Dans M.C. Lovett et P. Shah (dir.), *Thinking With Data* (p. 117-147), New York, NY : Lawrence Erlbaum Associates.

[22] Gattuso, L. (1997), La moyenne, un concept évident ?, *Bulletin AMQ*, **37**(3), 10-19.

[23] Gattuso, L. et Vermette, S. (2013), L'enseignement de statistique et probabilités au Canada et en Italie, *Statistique et Enseignement*, **4**(1), 107-129.

[24] Guay, S., Van Moorhem, A., Amideneau, S., Dionne, F., Ducharme, M., Gagnon, D., Huot, M., Laplante, S., Le Nabec, M. et Roy, M. (2008*a*), *Point de vue-2^{e} année du 2^{e} cycle du secondaire-Séquence culture, société et technique*, Laval : Éditions Grand Duc.

[25] Guay, S., Van Moorhem, A., Amideneau, S., Dionne, F., Ducharme, M., Gagnon, D., Huot, M., Laplante, S., Le Nabec, M. et Roy, M. (2008*b*), *Point de vue-2^{e} année du 2^{e} cycle du secondaire-Séquence technico-sciences*, Laval : Éditions Grand Duc.

[26] Hill, H. C., Rowan, B. et Ball, D. L. (2005), Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement, *American Educational Research Journal*, **42**, 371–406.

[27] Holm, J. et Kajander, A. (2012), Interconnections of Knowledge and Beliefs in Teaching Mathematics, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **12**(1), 7-21.

[28] Lave, J. (1988), Cognition in practice, Cambridge University Press, Cambridge.

[29] Makar, K. et Confrey, J. (2005), Variation-talk: Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, **4**(1), 27-54.

[30] Mason, J. et Spence, M. (1999), Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment, *Educational Studies in Mathematics*, **38**(1-3), 135-161.

[31] Meletiou-Mavrotheris, M. et Lee, C. (2005), Exploring introductory statistics students' understanding of variation in histograms. *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Sant Feliu de Guíxols, Spain.

[32] Moreira, P. et David, M. (2005), Mathematics in teacher education versus mathematics in teaching practice, *ICMI-15 study*.

[33] Peters, S.A. (2014), Developing understanding of statistical variation: secondary statistics teachers' perceptions and recollections of learning factors, *Journal of Mathematics Teacher Education*, **17**(6), 539-582.

[34] Proulx, J. (2008), Exploring School Mathematics as a Source for Pedagogic Reflections in Teacher Education, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **8**(4), 331-354.

[35] Proulx, J. (2017), Le calcul mental en mathématiques : quels potentiels pour l'activité mathématique ?, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, DOI: 10.1080/14926156.2017.1378833

[36] Proulx, J. et Bednarz, N. (2010), Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1 : Réflexions fondées sur une analyse des recherches, *Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana*, **1**(1), http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia.

[37] Proulx, J. et Bednarz, N. (2011), Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 2 : Une entrée potentielle par les mathématiques professionnelles de l'enseignant, *Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana*, **1**(2), http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia.

[38] Reading, C. et Shaughnessy, J. M. (2004), Reasoning about variation. *In* Ben-Zvi et J. Garfield (dir.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (p. 201-226). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[39] Shaughnessy, J.M. et Chance, B. (2005), *Statistical questions from the classroom*, VA: Arlington. National Council of Teachers of Mathematics.

[40] Shulman, L. (1986), Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, **15**(2), 4-14.

[41] Shulman, L. (1988), Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. *In* M. C. Whittrock (dir.), *Handbook of research on teaching* (p. 3- 35), New York, NY: Macmillan Publishers.

[42] Silva, C.B. et Coutinho, C.Q.S. (2006), The variation concept: A study with secondary school mathematics teachers. Dans A. Rossman et B. Chance (dir.), *Proceedings of the seventh International Conference on Teaching Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute.

[43] Skemp, R.R. (1978), Relational understanding and instrumental understanding, *The Arithmetic Teacher*, **26**(3), 9-15.

[44] Vermette, S. (2013), *Le concept de variabilité chez des enseignants de mathématiques au secondaire*, Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, Sherbrooke.

[45] Watson, J.M. (2007), The role of cognitive conflict in developing students' understanding of average, *Educational Studies in Mathematics,* 65, 21-47.